This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ANDREÆ TACQUE

Soc. Jeſu Matheſeos Prof.

ARITHMETICÆ THEORIA, ET PRAXIS

Editio noviſſima, præcedentibus nitidior, & emendatior, cui acceſſit

NICOLAI DE MARTINO DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS

OPUSCULUM.

MEDIOLA

Excudit FRANCISCUS A

ANNO MDCC

PUBLICA AUCTORITATE, A

QA
35
T12
1741

AD LECTOREM.

TACQUETI *Arithmeticam, ſæpius recuſam, denuo tibi ſiſto, Benevole Lector; quum ſaltem in noſtris hiſce regionibus difficile eſſet eam comparare. Non hic te moror in operis Auctore laudibus proſequendo; quippe quem, & ſua in inveniendo ſubtilitas, & ejuſdem in exponendo ſolertia jam omni fecit laude majorem. Multo minus Editionem hanc meam tibi commendo; nam quantum præcedentibus ſit nitidior, & emendatior, vel ex ſol earum collatione liquebit. Id un monitum te volo, Editioni operam daſſe præclariſſimum venem Nicolaum de Marti in illuſtri Lyceo Neapoli gno applauſu publice*

1/27·27 1/3.6.

profitetur. Quumque eum rogaſſem, ut non ſineret, adeo praclarum opus ſine aliquo comitatu iterum in lucem prodire, cogitabat ille brevi Algebræ ſpecimine novam ejus Editionem ornare. Sed deinde opuſculum de Permutationibus, & Combinationibus, in calce Operis jam appoſitum, compoſuit; quia doctrina iſta, adeo utilis, viſa eſt ei leviter ab Auctore pertractata. Interim loco ſpeciminis integram, omnibuſque numeris abſolutam Algebram tibi parat, quæ propediem lucem adſpiciet; quum primæ ejus paginæ jam ſub prælo reperiantur. Vale.

SYL-

SYLLABUS
LIBRORUM, AC CAPITUM.

ARITHMETICÆ.

Prolegomena.
Definitiones, & Axiomata.

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ.

Liber Primus, Euclid. Septimus.
Liber Secundus, Euclid. Octavus.
Liber Tertius, Euclid. Nonus.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

LIBER PRIMUS.

Logiſtica integrorum numerorum.

CAP. I. *Notarum Arithmeticarum inſtitutio.*
CAP. II. *Numeratio.*
CAP. III. *Poriſmata quædam ex quibus pendent rationes operationum logiſticarum.*
CAP. IV. *Additio.*
CAP. V. *Subtractio.*
CAP. VI. *Tabula Pythagorica multiplicationi, diviſionique inſerviens.*
CAP. VII. *Multiplicatio.*
CAP. VIII. *Multiplicatio expeditiſſima per laminas Tabulæ Pythagoricæ.*
CAP. IX. *Diviſio.*
CAP. X. *Diviſio facillima per laminas Tabulæ Pythagoricæ.*

CAP. XI. *Additionis, ſubtractionis, multiplicationis, diviſionis examina.*

LIBER SECUNDUS.

Logiſtica fractorum numerorum.

CAP. I. *Fractorum numerorum definitio, ſcriptio, enunciatio.*
CAP. II. *Fractorum prima Theoria.*
CAP. III. *Reductiones fractorum.*
CAP. IV. *Additio.*
CAP. V. *Subtractio.*
CAP. VI. *Multiplicatio.*
CAP. VII. *Diviſio.*
CAP. VIII. *De fractis fractorum.*
CAP. IX. *Fracti decimales.*
CAP. X. *Requiſita quædam ad demonſtrationem logiſticæ decimalis.*
CAP. XI. *Additio decimalis.*
CAP. XII. *Subtractio decimalis.*
CAP. XIII. *Multiplicatio decimalis.*
CAP. XIV. *Diviſio decimalis.*
CAP. XV. *Uſus fractorum decimalium.*

LIBER TERTIUS.

De Radicum extractione.

CAP. I. *Radicis quadratæ extractio.*
CAP. II. *Radicis quadratæ demonſtratio.*
CAP. III. *Radicis cubicæ extractio.*
CAP. IV. *Radicis cubicæ demonſtratio.*
CAP. V. *Cujuſcumque Radicis extractio.*
CAP. VI. *Extractio quarumlibet radicum ex*

fractis

fractis etiam decimalibus.
CAP. VII. *Approximatio radicum.*
CAP. VIII. *De Tabulis quadratorum, & cuborum.*
CAP. IX. *Uſus laminarum Tabulæ Pythagoricæ in extractione radicum.*

LIBER QUARTUS.

De Regulis.

CAP. I. *Regula ſimplex proportionum directa, & everſa.*
CAP. II. *Regula proportionum compoſita, tam directa, quàm everſa.*
CAP. III. *Regula ſocietatum.*
CAP. IV. *Regula alligationis.*
CAP. V. *Regula falſi ſimplex.*
CAP. VI. *Regula falſi duplex.*

LIBER QUINTUS.

De Progreſſionibus.

De Progreſſione Arithmeticâ.

CAP. I. *Progreſſionis Arithmeticæ affectiones.*
CAP. II. *Progreſſionis Arithmeticæ Problemata.*
CAP. III. *Quæſtiones circa progreſſiones Arithmeticas.*

De Progreſſione Geometricâ, cum finitâ, tum infinitâ.

CAP. IV. *Progreſſionis Geometricæ finitæ, & infinitæ affectiones.*
CAP. V. *Progreſſionis Geometricæ finitæ, ac infinitæ Problemata.*
CAP. VI. *Quæſtiones circa progreſſiones Geometricas.*
CAP. VII. *De mediis quotcumque proportionalibus numeris inter duos datos.*
CAP. VIII. *De permutationibus, & combinationibus.*

APPENDIX.
Additio.
Subtractio.
Multiplicatio.
Diviſio.
Tabulæ figurarum.

Ad Bibliopegum.

Figuras omnes operis calci apponendas cenſeo, ita quidem, ut ad uſum extra pagellas explicatæ promineant.

ARITHMETICÆ PROLEGOMENA.

ARithmetica eſt pars Mat
ticæ, extracta ex princi
biſcum natis, occultas
proprietates, & intri
tiones rectè, & facilè explicare doce

Adjuncta Arithmeticæ, alia ſun
nia toti Mathematicæ, ea ſcilicet, q
tur; alia ſunt ipſi propria, quæ
quentur.

1. Arithmeticæ, ſicut & M
theſauris tantus eſt, ut nemo
totum exhaurire potuerit. Om
ces de ſeipſis fateri coguntur,
ſeipſo teſtatur, cum ait.

Aſſiduè diſcens plurim

2. Arithmetica, ſicut &
xima Sapientiæ humanæ
artes omnes, ut Medici
alias; ordine vero Ethic
monſtrationes enim acq
culativis eſt: objecti
inter ſpeculativas, Pl
rata à Metaphyſica.

3. Maxima benef
compenſantur, ait
meticæ, ſicut M

quam de omnibus optimè meritam multi non tantùm negligunt; ſed & ut inutilem contemnunt.

4. Quælibet terra artem alit: aliæ verò regiones aliam in primis. Sic Arithmeticam præcipuè Phænices, Geometriam Ægyptii, Aſtronomiam Chaldæi, Græci univerſam Mathematicam excoluiſſe traduntur; inter quos Plato, Vir ſapientiſſimus Græciæ extitit.

5. Arithmetica, ut Mathematica, una antiquiſſimarum ſcientiarum eſt. Nam & Veteres illam docebant, diſcebant, exercebant, priuſquam vel Phyſica, vel Ethica, vel Logica eſſet: & inventis etiam his, & aliis artibus, aut ſcientiis, ab hac initia ſtudiorum ducebant: eruditionis verò abſolutionem à Phyſicis, & Politicis petebant. *

1. Arithmetica omnium Mathematicarum prima eſt, & veluti parens, dux, & domina. Hac enim ſublatâ, evaneſcunt & cæteræ: ſed non contra, ſublatis cæteris, etiam hæc ipſa evaneſcit.

2. Nullius artis tam frequens, quàm Arithmeticæ, actio eſt. Hæc agit, ſive quis negotio, ſive otio ſe dedat: hæc operam dat ſtudioſo, tum pecuniæ, tum artium liberalium: hæc privatam, & publicam vitam agenti fidelem miniſtram ſe præbet.

3. Floruiſſe apud Phænices propter mercaturam, referunt hiſtorici: floret eadem etiamnum

* *Plura alia videri poſſunt in narratione hiſtorica de ortu, & progreſſu Matheſeos, Elementis Geometriæ ejuſdem Authoris præfatâ, Editione ultimâ Amſtelodami 1701. apud* F. van-der Plaats.

num in tabernis Mercatorum. Turpe igitur jacere ſpretam, atque neglectam in Scholis, quibus ſcientiarum, & artium defenſionem, atque conſervationem Reſpublica commendavit.

4. Hæc diſciplina, ut mox incipiente mundo cœpit, ita nulli magis ætati, quàm primæ convenit: eamdem ob cauſam diſcenda inter ipſa ſtudiorum initia, & non poſt principia. Objectum illius eſt numerus. Species duæ: Vulgaris, & Coſſica. Hæc alterius temporis opus erit; Illa vero, de quâ nunc agitur, in duas partes dividetur, ſcilicet in Theoricam, & Practicam, ad quarum intelligentiam neceſſaria ſunt aliqua principia, ſive definitiones, & axiomata, nec non quædam adnotationes, quæ ſequuntur, & quæ ſparſim in hoc opere diſpergentur.

DEFINITIONES.

1. Unitas eſt, ſecundùm quam unumquodque eorum, quæ ſunt, unum dicitur.

Omnis numeri principium unitas eſt.

2. Numerus eſt compoſita ex unitatibus multitudo.

3. Numerus numerum metiri dicitur, cum minor aliquoties ſumptus majori æqualis fit. *Num.* 4. *Metitur* 12., *quia ter* 4. *facit* 12. *Unitas metitur omnes numeros.*

4. Numerus numeri multiplex eſt, cum minor metitur majorem, ſive cum major minorem aliquoties continet præcisè.

5. Pars

5. Pars aliquota numeri eſt, quæ numerum metitur: pars aliquanta, quæ non metitur.

Numerus 2. eſt pars aliquota 10. quia metitur 10. acceptus nimirum quinquies. 3. verò eſt pars aliquanta 10. quia non metitur 10. nam ter acceptus facit 9. quater acceptus facit 12.

6. Similes aliquotæ partes ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur; ſive, quæ in ſuis totis æquè ſæpe continentur.

2., & 3. ſunt ſimiles aliquotæ numerorum 10., & 15., quia tam 2. in 10. quàm 3. in 15. continentur quinquies: ſive tam 2. totum ſuum 10., quàm 3. ſuum totum 15. metiuntur per eumdem numerum 5.

10.	15.
2	3

7. Similes partes aliquantæ ſunt, quæ in ſuis totis æquè ſæpe continentur, atque inſuper æquè multæ ipſarum partes aliquotæ ſimiles.

Vel partes aliquantæ ſimiles ſunt, quæ æquè multas ſuorum totorum continent aliquotas ſimiles.

14	28
8	16

8 & 16. ſunt ſimiles partes aliquantæ numerorum 14., & 28 quia ſicuti 8 continetur ſemel in 14., atque inſuper 6., ſeu ter 2. hoc eſt tres quartæ partes ipſius 8., ita 16 in 28. continetur ſemel, atque inſuper 12., ſeu ter 4., hoc eſt etiam tres quartæ partes 16.

Vel ſic: 8, & 16. ſunt ſimiles partes aliquantæ totorum 14, & 28., quia ſicuti 8 continet totius 14 quatuor ſeptimas partes, nempe quater 2., ita 16 continet totius 28 quatuor ſeptimas, nempe quater 4.

8. In numeris ratio, ſive proportio eſt duorum numerorum mutua quædam habitudo ſecundùm

cundùm exceſſum, vel defectum, vel æqualitatem.

In omni proportione duo ſunt termini, quorum is dicitur antecedens, qui primo loco ſive in recto nominatur; alter conſequens. Cum antecedens eſt major conſequente, dicitur proportio majoris inæqualitatis, ſeu majoris ad minus. Cum antecedens eſt minor conſequente, proportio minoris inæqualitatis, ſeu minoris ad majus appellatur. Cum antecedens conſequenti par eſt, dicitur æqualitatis proportio.

9. In numeris duæ proportiones ſunt æquales, eædem, ſimiles (idem iſta ſignificant) ſive quatuor numeri (A. B. C. D.) dicuntur proportionales, cùm minores utriuſque proportionis termini in majoribus eodem modo continentur. Continentur autem eodem modo, ſi minores (B, D) ſint majorum (A, C) ſimiles partes *a* aliquotæ, vel ſimiles partes *b* aliquantæ. *a* vide def. 6. *b* vide def. 7.

A	8	2	B
C	16	4	D

A	14	8	B
C	28	16	D

Æquales proportiones ſic efferimus, 8. eſt ad 2. ut 16 eſt ad 4.

Vel 8. habet ad 2. eamdem rationem, quam 16. ad 4.

10. Cùm plures extiterint æquales rationes, & prioris conſequens fuerit antecedens poſterioris (ſic ut medii termini bis ſumantur,) proportio continua dicitur; & numeri ipſi dicuntur continuè proportionales.

Continuas rationes ſic efferimus: 1. eſt ad 2. ut 2. ad 4. & 4. ad 8. & 8. ad 16. &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32.

11. Quod ſi unius æqualium proportionum conſe-

conſequens non ſit antecedens alterius, ac proinde medii termini non accipiantur bis, diſcreta proportio erit; & numeri ipſi proportionales dicuntur, nullo alio addito.

Diſcretas proportiones ſic efferimus. 9. eſt ad 3. ut 12. ad 4.

9. 3.
12. 4.

12. Cum numeri fuerint continuè proportionales (A, B, C, D, E,) ratio primi A ad tertium C duplicata dicitur rationis, quam habet primus A ad ſecundum B; & ratio primi A ad quartum D dicitur triplicata rationis primi A ad ſecundum B., & ſic deinceps.

A,	B,	C,	D,	E,
1	3	9	27	81
81	27	9	3	1

De rationum denominatoribus & compoſitione, vide Elementa noſtra Geometrica l. 5. parte 3. II, & X.

13. Numerus A multiplicare dicitur numerum B, cum B multiplicandus toties accipitur, quot ſunt unitates in A multiplicante.

Vel ſic: numerus A multiplicat numerum B, cùm invenitur numerus C toties continens multiplicatum B, quoties A multiplicans continet unitatem.

Verùm univerſaliùs multiplicatio ſic definitur. Numerus A multiplicat numerum B, cum numerus reperitur C, qui ita ſit ad B multiplicatum, ut A multiplicans ad unitatem.

C8 B4
A2 1

Numerus C, qui invenitur, dicitur productus, ſeu genitus. Porro cum multiplicans A eſt numerus integer, ſemper productus C major eſt multiplicato B, ut patet ex def.

4
C--B4
3
1
A—1
3

1. &

1, & 2. *Cum verò multiplicans A eſt fracti[o] minor unitate, productus C etiam erit minor multiplicato B, ut patet ex poſtrema definitione.*

Plures numeri ut 2, 4, 3, per invicem multiplicari dicuntur, ſi 2 in 4, faciat 8, & productum 8 ducatur in 3; productum enim ultimum 24 eſt id, quod fit ex multiplicatione numerorum, 2, 4, 3.

Porro idem apud Arithmeticos eſt numerum in numerum ducere, quod numerum per numerum multiplicare. Frequens etiam iſta locutio eſt, A per B, vel potius A in B: hoc eſt A ductus, ſeu multiplicatus per B.

14. Numerus A dicitur dividere numerum B, cum numerus invenitur C, indicans qu[o]ties A diviſor in B contineatur. B12 A4

Et ſic diviſor A eſt pars diviſi ſeu dividendi B, ab invento (qui proinde quotiens dicitur) denominata.

Vel univerſaliter: numerus A dividit numerum B, cùm alius numerus invenitur habens ad unitatem, ut diviſus B ad
ſorem.

15. Numerus A metiri dicitur
numerum B per X numerum ali-
quem (qui quotiens appellatur)
A toties ſumptus, quot in X
unitates, menſum adæquat.

Hæc definitio differt à præced
diviſio peragi poſſit, licèt diviſ
non metiatur. 2. licèt diviſor ſi
do, ut ſuo loco tradetur. La
diviſio, quàm menſio.

16. Par numerus eſt, qui bifariam dividi poteſt. *Omnem ergo parem numerum aliquis numerus metitur per 2.*

17. Impar numerus eſt, qui bifariam dividi non poteſt, ſive, qui unitate differt à pari.

18. Pariter par eſt, quem par per parem metitur. *Talis eſt 24. quem par numerus 6 metitur per parem 4.*

19. Pariter impar eſt, quem par metitur per imparem. *Talis eſt 12, quem 4 par metitur per 3. imparem.*

20. Impariter impar eſt, quem impar metitur per imparem. *Talis eſt 21, quem 7 impar metitur per imparem 3.*

21. Primus, ſeu incompoſitus numerus eſt, quem ſola unitas metitur, *ac proinde nullas habet partes aliquotas præter unitates.*

Tales ſunt, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, & alii infiniti. Porro omnis primus numerus neceſſariò impar eſt, aliàs eum metiretur binarius.

22. Compoſitus numerus eſt, quem præter unitatem, aliquis numerus ab ipſo diverſus metitur, *ac proinde habet partes aliquotas ab unitatibus diverſas.*

Tales ſunt 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, & & alii infiniti.

23. Primi inter ſe numeri ſunt, quos nulla alia menſura communis metitur, quàm unitas.

Duo inter ſe primi ſunt 15. & 8. quia licet ſingulos aliqui numeri metiantur, ac proinde neuter primus ſit; tamen nullus numerus utrumque metiatur. Pari modo 8. 10. 15. ſunt tres primi inter ſe, quia nullus numerus illos tres metitur, & ſic deinceps.

24 Com-

D I

24. Com
præter unit
menſura,
Poteſt au
datorum nu
Duo in
utrumque,
duo compoſi
it ſum, &
12., quia 3.
ſunt quatuo
omnes quat
25. Pla
merorum
ri autem ir
dicuntur.
Omnis e
Sic planus
quia fit ex
26. Sol
merorum
verò ſe i
cuntur.
Omnis
Solidus eſt
numeroru
in 4. facit
27. Si
tionalia h
6. 24.
quorum
4. 6. *eſt*
4. *ad* 6.
24. 192.
4. 3. *ſu*
4. 8. 6.

28. Quadratus numerus eſt, qui fit ex multiplicatione duorum æqualium numerorum; ſive ex multiplicatione alicujus numeri per ſeipſum, qui radix quadrata dicitur.

Primus quadratorum eſt 4., qui fit ex 2. in 2. ſive ex 2. in ſe. Secundus eſt 9., qui fit ex 3. in ſe: & ſic deinceps in infinitum.

29. Cubus eſt, qui fit ex multiplicatione trium æqualium numerorum, ſive ejuſdem ter poſiti, qui radix cubica appellatur.

Primus cubus eſt 8. Fit ex multiplicatione binarii ter poſiti (2. 2. 2.) nam 2. in 2. facit 4., & 4. in 2. facit 8. Secundus eſt 27., qui fit ex multiplicatione ternarii ter poſiti. (3. 3. 3.) nam 3. in 3. facit 9., & 9. in 3. facit 27.

30. Perfectus numerus eſt, qui omnibus ſuis partibus aliquotis æqualis eſt.

Primus perfectus eſt 6. illius enim omnes aliquotæ partes ſunt 1. 2. 3., quæ ſimul faciunt 6. Secundus eſt 28. nam illius omnes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 7. 14, quæ ſimul efficiunt 28. De his vide prop. ultimam lib. 9., & ſcholium.

AXIOMATA.

A B
Z

1. Numeri A, B, æquè multiplices ejuſdem numeri Z, ſunt æquales. Et numeri, æquè multiplices æqualium numerorum, æquales ſunt.

2. Æquales ſunt numeri A, B, quorum æquè multiplex eſt idem numerus Z.

Et æquales ſunt illi numeri, quorum æquè multiplices ſunt æquales.

3. Æquales ſunt numeri, qui ſunt ejuſdem nume-

numeri eadem pars, ut dimidia, vel tertia, vel quarta, &c.

Et illi numeri ſunt æquales, qui æqualium numerorum eadem pars ſunt.

4. Æquales ſunt numeri, quorum unus numerus eadem pars eſt.

Et illi numeri ſunt æquales, quorum æquales numeri eadem pars ſunt.

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipſo ſunt, (hoc eſt per ipſum numerum) metitur.

6. Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem.

7. Si numerus A, multiplicans alium B, genuerit aliquem C, multiplicatus B genitum C metitur per multiplicantem A.

4A B3
C
12

Patet ex deſin. 13, *&* 15.

8. Si numerus A numerum C metiatur, ſeu dividat per quotientem B; etiam quotiens B, multiplicans metientem A, producet menſum C: ſive metiens A per quotientem B multiplicatus, reſtituit menſum C.

Patet ex deſin. 13. 15. 14.

9. Quolibet numero ſumi poteſt major.

10. Numerus A metiens quoſcumque numeros BC, CD, DE, etiam BE compoſitum ex ipſis metitur.

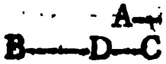
A--
B——C———D—E

11. Numerus A metiens quemcunque numerum B, metitur quoque omnem numerum C, quem ille B metitur.

A--2
B----4
C--------8

 12. Nu-

12. Numerus A metiens totum BC, & ablatum BD, mètitur & reliquum DC.



ADMONITIO
AD
LECTOREM.

EXpoſitis Definitionibus, & Axiomatis, ex quibus tota numerorum ſcientia deducetur, ad propoſitiones ipſas progredior, ſi prius quiddam monuero Lectores, quod intereſt ipſos ſcire. Euclides pro numeris ubique litteras alphabeti aſſumit optimo ſanè conſilio: ſic enim propoſitionum, ac demonſtrationum univerſalitas meliùs exprimitur. At cum numerum quempiam per alium multiplicat, A puta per B, productum tertiâ quâdam litterâ, puta C, deſignat. Ex quo id plerumque incommodi naſcitur, ut cum plures inſtitui multiplicationes neceſſe eſt, memoriâ excidat, quæ producta ex quorum multiplicatione laterum genita ſint, quod moleſtum eſſe ſolet lectoribus, & tenebras offundere. Sæpe igitur expediet productum multiplicationis eo modo exprimere, quo in logiſticâ ſpecioſâ utimur, ſolâ videlicet numerorum, qui ſe invicem multiplicant, appoſitione, ut ſi cupiam multiplicare numerum A per numerum B, productum erit AB. Primus *(quod ſciam) logiſticam ſpecioſam vel invenit, vel certè adhibuit Franciſcus Vieta:*

ſed

ſed Renatus Carteſius ad commodiorem formam revocavit. Præcepta hujus methodi à Franciſco à Schooten conſcripta, jam in lucem ſunt edita per Fr. Bartholinum.

Porro operationum ſpecioſarum prima rudimenta hæc ſunt. Si cupiam numerum A addere numero B, ſumma erit A + B. Signum enim (+) plus ſignificat. Si ſumma quæritur plurium A, B, C, ea erit A + B + C.

Si à numero A ſubtrahendus eſt numerus B, reſiduum erit A — B. Signum enim (—) ſignificat minus.

Si numerus A multiplicandus ſit per numerum B, productum, ut jam dixi ſupra, erit AB, ſeù BA.

Si A per A, productum erit AA.

Si AB per BC, productum erit ABBC.

Si AA per A, productum erit AAA.

Si A + B + C per D, ſingulis particulis appone D, & productum erit AD + BD + CD.

Si A, B, C, D per invicem, productum erit ABCD.

Et ſic in aliis. Ubi id notandum eſt, perinde eſſe, quo ordine in producto litteræ ſibi mutuò apponantur. Ut ſi productum quæratur ex numeris A, B, C, D inter ſe multiplicatis, illud erit, vel ABCD, vel ACBD, vel ADBC &c. Cum enim appoſitio numerorum multiplicationem deſignet, ea verò inter plures numeros, quocunque ordine facta, idem ſemper productum exhibeat, (quod in ſcholio prop. 19. l. 8. demonſtrabimus) perinde etiam erit, quo ordine ſibi mutuò apponantur.

Denique ſi numerum A dividere oporteat

per numerum B, quotiens deſignabitur, ſi infra dividendum A, lineolâ interpoſitâ, ſcribatur diviſor B. $\frac{A}{B}$

Si AB per A, quotiens erit B, A quippe ductum in B reſtituit AB.

Si AB + AC — AD per A, quotiens erit B + C — D. Nam B + C — D ductum in A, reſtituit AB + AC — AD.

Hac methodo, quod quidem ad multiplicationem attinet, in demonſtrandis horum trium librorum propoſitionibus non paucis utemur, tum videlicet cum facilitari inde demonſtrationes poterunt; id quod ſæpe accidet, cum plurimum referat in decurſu demonſtrationis producti latera ante oculos obſervari. Verùm hoc obſervandum erit, duas litteras conjunctas aliquando tantùm ſimplicem numerum deſignare, ut in tribus primis prop., & paucis aliis, quod ſatis ex textu ipſo, & ſenſu verborum colligetur.

Cæterum non mihi propoſitum fuit hìc tradere præcepta Logiſticæ ſpecioſæ, de quâ, atque Algebrâ tum numeroſâ, tum ſpecioſâ, ſi Deo placuerit, alio loco acturus ſum; ſed ea ſolùm attingere, quorum in his elementis, ac deinde in Arithmeticâ practicâ uſus erit.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ LIBER PRIMUS.

EUCLIDI SEPTIMUS.

In citationibus librorum
Euclidis numeri
retinentur.

PROPOSITIO PRIMA.

SI à duobus numeris inæqualibus detrahatur ſemper minor de majore alternâ quâdam detractione, neque reliquus unquam metiatur præcedentem, quoad ventum ſit ad unitatem; primi (a) inter ſe erunt dati numeri. a f

A——E—G-F
C—F-D
H

Dati ſint duo numeri AB, & CD; minor CD detractus ex AB, quoties poteſt, relinquat EB: EB verò detractus ex CD, qu poteſt, relinquat FD: FD, quoties p detractus ex EB relinquat unitatem. Di meros AB, CD eſſe primos inter ſe.

Eſto enim, ſi fieri poteſt, num AB, CD communis menſura nume H. Quoniam ergo H vis metiri C metitur *b* AE, etiam H *c* metietu H vis metiri quoque totum AB, F

d ax. 12. titur *d* etiam reliquum EB. Metitur autem
e hyp EB ipſum *e* CF. Ergo, & H *f* metitur CF.
f ax. 11. Quare cum H volueris metiri etiam totum
g ax. 12. CD; H quoque metietur reliquum *g* FD:
h hyp. FD autem metitur *h* EG. Ergo H quoque
i ax. 11 metitur *i* EG. Oſtendi verò ſupra H metiri
k ax. 12. etiam totum EB. Ergo H metitur *k* etiam reliquum GB, numerus unitatem, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis AB, DF non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram invenire.

A————C———B Minor D F detractus
D———E—F ex majori AB, quoties
O——— poteſt, relinquat C B, C B detractus, quoties poteſt, ex DF relinquat EF, & ſic deinceps.

Hâc alternâ detractione relinquetur tandem aliquis numerus, qui præcedentem metiatur: nam ſi ad unitatem deveniretur, dati numeri
a præced. *a* eſſent primi, contra hyp. Eſto igitur reliquus E F, qui præcedentem C B metiatur. Dico E F eſſe maximam communem menſuram numerorum A B, & D F. Quod ſic demonſtrabitur.

b conſt. E F metitur *b* C B, & C B metitur *c* D E.
c conſt. Ergo E F etiam *d* metitur D E. Metitur verò
d ax. 11. E F etiam ſe. Ergo E F metietur *e* totum D
e ax. 12. F. Sed D F metitur *f* A C. Ergo E F meti-
f conſt. tur etiam *g* A C. Metitur autem E F etiam *h*
g ax. 11 C B. Ergo E F metitur quoque *i* totum A B.
h conſt.
i ax. 10. E F igitur ipſorum A B, & D F communis menſura eſt. Quod

Quod verò ſit maxima, ſic oſtenditur. Eſto, h ſi fieri poteſt, alia O major, quàm EF. Quoniam vis O metiri DF; DF verò metitur AC, etiam O metietur k AC. Vis autem O etiam metiri AB. Ergo O metietur quoque l CB. Sed CB m metitur DE. Ergo O etiam metitur n DE. Quare cum O metiri velis etiam totum DF, metitur O quoque o reliquum EF, ſe minorem, quod eſt abſurdum.

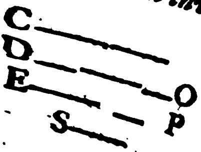
k ax. l ax. m conſt. n ax. 11 o ax. 12

Corollarium.

Numerus O, metiens duos numeros AB, DF, metitur quoque maximam eorum communem menſuram EF.

PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis, non primis inter ſe, C, D, E, maximam eorum communem menſuram invenire.



Inveniatur O maxima a communis menſura duorum C, D. Si O etiam metitur E, erit maxima communis menſura trium C, D, E: nam ſi eſſet aliqua S major, quam O, metiretur S etiam O per corol. præced., quod eſt abſurdum, cum S ponatur major, quàm O.

a 2 præced.

Quod ſi O non metiatur E, ſaltem O, & E, inter ſe compoſiti erunt. Cum enim C, D, E, b ſint tres inter ſe compoſiti, aliqua menſura c communis eos c metietur, ac proinde etiam d ipſum

b hyp. c def. 14. d coroll. præc.

ipſum O. Duorum igitur O, E inveni maximam communem menſuram P. Dico, P communem eſſe maximam trium C, D, E.

e conſt. f conſt. g ax. 11. h conſt.

Cum enim P *e* metiatur O; O verò metiatur *f* C, D; etiam P *g* metietur C, D. Metitur autem *h* P Etiam E. Ergo P eſt menſura trium C, D, E. Quod verò maxima ſit, ſic oſtenditur. Sit alia S major, ſi fieri poteſt, quàm P. Quoniam ergo S metitur C, D, E, metietur *i* quoque ipſorum C, D maximam menſuram O. Quia ergo S metitur E, & O, metietur *k* rurſum S eorum maximam menſuram *l* P, major minorem. Quod eſt abſurdum.

i corol. præc. k idem corol. l conſt.

D——C——E——
O——S——
P——

Corollarium.

1. EOdem artificio reperietur quatuor, imo quotvis, non primorum inter ſe numerorum, menſura communis maxima.

2. Numerus S, metiens quoſcunque numeros E, D, C, metitur etiam eorum maximam communem menſuram P. Patet ex ultima parte demonſtrationis.

PROPOSITIO IV.

ET reliquæ uſque ad 15. incluſivè continentur in propoſitionibus univerſalibus libri 5. Elem. Geom.

PROPOSITIO XVI.

DUo numeri A, B, ſe mutuò multiplicantes, æquales numeros producunt C, D.

Quoniam A multiplicans B facit D, erit *a* unitas ad A, ut

a def. 13. l. 7.

unit. 1.
A 6 B 4

A, ut B ad D. Igitur *b* permutando, ut unitas eſt ad B, ſic A ad D. Rurſus quia, B multiplicans A facit C, erit ut unitas *c* ad B, ſic A ad C. Ergo A ad D, & C eamdem habet rationem. Ergo C, & D *d* æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum. C 24 D 24 *b* 16. l. 5. *c* def. 13. l. 7. *d* 9. l. 5.

Corollarium.

1. Si numerus A, multiplicans numerum B, fecerit C, multiplicans A metietur productum C per B multiplicatum. Nam quia A in B facit C, etiam B in A facit C per hanc prop. Ergo, cum A, qui prius erat multiplicans, jam ſit etiam multiplicatus reſpectu ejuſdem producti C, patet ex axio. 7. A metiri B per C. A B C

2. Si A metitur ſeu dividit C per B, etiam B quotiens per A metietur eumdem C. A B C

Nam quia A per B metitur C, ergo per ax. 8. B multiplicans A faciet C. Ergo per hanc XVI. etiam A multiplicans B faciet C. Ergo per ax. 7. B per A metitur C. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XVII.

SI numerus A, multiplicans quotcumque numeros B, C, totidem genuerit numeros AB, AC, erunt geniti AB, AC multiplicatis B, C proportionales.

Cum enim A, multiplicans B, fecerit AB,

unitas
1
A
B. C.
AB AC.

unitas AB, erit ut *a* unitas ad A, ſic B ad A B. Rurſus cum A multiplicans C fecerit AC, erit ut *b* unitas ad A, ſic C ad AC. Ergo B eſt ad AB, ut *c* C ad AC. Igitur permutando eſt B ad C, *d* ut AB ad AC. Quod erat demonſtrandum.

a def. 3. l. 7.
b ibid
c 11 l. 5.
d 16. l. 5.

Scholium.

Coepimus hìc multiplicationis productum exprimere ſolâ numerorum multiplicantium mutuâ appoſitione, de quâ vide dicta ante principium hujus 7. libri. Hæc methodus cum adhibebitur, quod ingenti plerumque compendio fiet, commodius efferetur propoſitione 17. hunc in modum.

Numeri quotcunque AB, BC, commune latus habentes B, eam inter ſe proportionem habent, quam latera reliqua A, & C.

Latera numeri ſunt, ex quorum multiplicatione producitur. Porro, ut huic methodo, quæ, ut dixi, commodi permultum, ac compendii habet; Tirones melius aſſueſcant, præter exemplum in prop. adductum, alia adhuc nonnulla viſum eſt ſubjungere.

I. AA eſt ad AB, ut A ad B.
II. AB eſt ad BB, ut A ad B.
III. AAA eſt ad AAB, ut A ad B.
IV. ABB eſt ad BBB, ut A ad B.

In I. commune latus eſt A, reliqua vero ſunt A ſecundum, & B. In II. latus commune eſt B, reliqua verò ſunt A, & B ſecundum. In III. latus commune eſt AA, re-

liqua

liqua verò ſunt A tertium, & B. In IV. latus commune eſt BB, reliqua ſunt A, & B tertium.

V. AA, AB, BB. ſunt continuè proportionales in ratione A ad B. Patet ex I. & II.

VI. AAA, AAB, ABB, BBB ſunt continue proportionales in ratione A ad B. Patet ex III., & IV.

VII. AB, AC, AD, AE, AF eam inter ſe rationem habent, quam B, C, D, E, F. Patet ex ipſa propoſitione.

Quantus ſit hujus ſcholii uſus ad demonſtrationes prolixas aliàs, & difficiles facillimè expediendas, tum in his libris deinceps, tum in Arithmetica Practica, plurimis locis apparebit.

PROPOSITIO XVIII.

SI quotcunque numeri B, C, multiplicantes eundem numerum A, totidem genuerint numeros D, F; erunt geniti D, F multiplicantibus B, C proportionales.

B 2 C 4 Nam cum B per A fecerit D;
A 3 etiam A *a* per B facit D: & cum — *a* 16. I. 7.
D 6 F 12 C per A faciat F; etiam *b* A per — *b* ibid.
C faciet F. Ergo *c* B eſt ad C, ut — *c* præced.
D ad F, Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

NUmerus A dividens, ſeù metiens quotcunque numeros I, P, gignit quotientes R, S, numeris diviſis, ſeù menſis proportionales. — Vide Schema pag. ſeq.

Nam

Nam quoniam A ipſos I, P metitur, ſeù dividit per quotientes R, S; manifeſtum eſt ex 8. axio. A in R, & S ductum producere I, & P. Ergo per 17. ut I eſt ad P, ſic R eſt ad S.

Aliter.

I 12 P 20
A 4
R 3 S 5
unit.
S

Cùm A metiens, ſeù dividens I fecerit R; erit ut *d* unitas ad R, ſic A ad I. Igitur *e* permutando, ut ûnitas eſt ad A, ſic R eſt ad I. Rurſum cum A metiens P, fecerit S; erit *f* unitas ad S, ut A ad P. Ergo permutando ut unitas eſt ad A, ſic S eſt ad P. Quare cum jam oſtenderim, etiam R eſſe ad I, ut unitas eſt ad A, erit *g* R ad I, ut S ad P. Et permutando R ad S, ut I ad P. Quod erat demonſtrandum.

d def. 14.
e 16. l. 5.
f def. 4.
g 11. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI quatuor numeri A, B, C, D proportionales fuerint; genitus AD ex primo A, & quarto D genito BC ex ſecundo B, & tertio C æqualis erit. Et è converſo.

A 3 B 2
C 6 D 4
BC 12 AD 12
AC

I. Pars. A multiplicans C faciat AC. AC eſt ad AD *a*, ut C ad D. & A C eſt ad B C *b*, ut A ad B. Quare cum *c* A ſit ad B, ut C ad D, etiam AC *d* eſt ad AD, ut AC eſt ad BC. Ergo BC, AD *e* æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a 18. ant. 17. l. 7.
b per eand.
c hyp.
d 11. 5.
e 9. l. 5.

Pars

Pars II. Quoniam geniti AD, BC jam ponuntur æquales; erit *f* AC ad BC, ut AC ad AD. Sed ut AC eſt ad BC, ſic *g* A eſt ad B: & ut AC eſt ad AD, ſic C eſt ad D. Ergo *h* A eſt ad B, ut C ad D. Quod erat demonſtrandum.

f 7. l. 5.
g 18. 7.
h 11. 5.

Corollarium I.

SI duo numeri B, C metiantur, ſeù dividant eumdem numerum A, per quotientes O, P; erit ut B ad C, ita reciprocè P ad O.

	A	
B.		C.
O.		P

Nam quia B, C metiuntur, ſeù dividunt A per O, & P, ergo per ax. 8. tam B in O, quàm C in P faciunt A. Ergo per hanc prop. B eſt ad C, ut P ad O.

Corollarium II.

SI A ad B majorem rationem habeat, quàm C ad D; AD genitus ex primo A in quartum D major erit, quàm BC genitus ex ſecundo B in tertium C.

A 4	2 B	
C 6	4 D	
AD 16.	12 BC	
A	C	

Et è converſo.

I. Pars. A in C faciat AC, AC ad BC eamdem proportionem habet, quàm *a* A ad B; hoc eſt majorem *b*, quàm C ad D; hoc eſt majorem *c*, quàm rurſus AC ad AD. Ergo BC minor *d* eſt, quàm AC.

II. Pars. Quoniam AD jam ponitur major, quàm BC; erit ratio AC ad BC major ratione AC ad AD. Sed ratio AC ad BC eſt ratio *f* A ad B;

a ſchol. p. 17. l. 7.
b hyp.
c ſchol. p. 17.
d 10. l. 5.
e 8. l. 5.
f ſchol.

g idem. ad B; & ratio AC ad AD eſt ratio *g* C ad D. Ergo etiam ratio A ad B major eſt ratione C ad D.

PROPOSITIO XX.

SI tres numeri A, B, C proportionales fuerint; A C genitus ab extremis æqualis eſt B B quadrato medii.

Et ſi genitus ab extremis quadrato medii æqualis eſt; tres numeri proportionales erunt.

A 4	B 8		
B 8	C 16		
BB 64	AC 64		

Pars I. Ponatur medius B bis. Igitur per hypoth. A eſt ad B, ut B ad C. Cum ergo quatuor jam habeantur proportionales; erit *a* genitus ab extremis AC par genito ex B ſecundo, & B tertio, hoc eſt quadrato ipſius B.

a 1. par. præced.

Pars II. Eodem modo demonſtrabitur ex II. parte præcedente.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri A, & B, omnium ſibi proportionalium minimi, numeros ſibi proportionales C, & D æquè metiuntur.

Nam quia per hyp. A eſt ad B, ut C ad D; etiam permutando A eſt ad C, ut B ad D. Ergo A, & B ipſorum C, & D ſunt *a* partes ſimiles, vel aliquotæ, vel aliquantæ. (Eſſe verò A, B minores ipſis C, D, patet ex hypotheſi.) Sed non ſunt ſimiles aliquantæ; quod ſic oſtendo.

a def. 9.

do. Si A, B ipſorum C,
tæ, ergo ꝰ b A continet O

A 2 B 1 C, q
O P D, l
C 6 D 9 eſt a
pern

ut C eſt ad D; hoc eſt
continent ipſos O, P
minimi ſuæ proportioni
theſim. Igitur A, B
ſimiles aliquantæ. Reli
ſes aliquotæ ſint ac pr
metiantur. Quod erat

Coroll

A.B.C.D.E.
O.P.Q.R.S.
F.G.H.I.K.

E A,
pro
quocunque extiterint
portionales F, G, H

PROPOS

C*ontinetur in pr*

PROPO

P*rimi a inter ſe n*
ſibi proportiona

Sint enim alii, ſi
C, D minimi, &
les ipſis A, B. I

b 21. l. 7. def. 15. me iuntur *b* ipſos A, B æquè, unit. hoc eſt per eumdem numerum E. Quia ergo C metitur A per E; unitas eſt ad E, ut C ad A: & permutando, ut unitas eſt ad C, ſic E eſt ad A. Sed unitas metitur C, Ergo etiam E metitur A. Eodem modo oſtendam, E metiri B. Cum igitur E metiatur A, & B, non erunt A, B primi inter ſe: quod evertit hypotheſim.

Corollarium.

EOdem prorſus modo demonſtrabitur, ſi quotvis fuerint numeri A, B, C, D primi inter ſe, eos fore quorumlibet ſibi totidem proportionalium minimos.

A B C D
F G H I
E
unitas

PROPOSITIO XXIV.

NUmeri, omnium ſibi proportionalium minimi A, B ſunt inter ſe primi.

Si non, communis menſura E metiatur A per C, & B per D. Ergo *d* ut A ad B, ſic C ad D. Cum ergo C, D ſint minores, quàm A, B, non erunt A, B minimi omnium ſibi proportionalium: quod evertit hypotheſim.

d cor. p. 18. l. 7.

A4 B5
E
C D

Corollarium.

A B C D
E

EOdem modo demonſtrabitur, ſi quotcumque fuerint numeri

F G H I meri A, B, C, D quorumlibet ſibi totidem proportionalium minimi, eos fore inter ſe primos.

PROPOSITIO XXV.

Numerus N, qui ex duobus A, B inter ſe primis metitur unum A, ad reliquum B, primus eſt.

A B
N X

Nam ſi N, B non ſint primi inter ſe, utrumque metiatur X. Quoniam ergo X metitur N, & N metitur *a* A; etiam X metietur *b* A. Volebas autem, X etiam metiri B. Ergo A, B non ſunt inter ſe primi: quod repugnat hypotheſi. *a* hyp. *b* ax. 11.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri A, B ad quempiam C primi fuerint, etiam AB ex iis genitus ad eundem C primus erit.

A 7 B 3
C 8
A B 21
D—F—

Si enim AB, & C non ſint inter ſe primi, utrumque metiatur D per F. Ergo D in *c* F facit AB. Atqui etiam *d* A in B facit AB. Ergo D eſt ad A, *e* ut B ad F. Jam verò, quia A, & C ſunt inter ſe primi, & D volebas metiri ipſum C, erit *f* D ad A primus. Ergo D, & A in ſuâ proportione *g* ſunt minimi. Ergo ſibi proportionales *h* B, F æquè metiuntur; D nempe ipſum B, & A ipſum F. Quare, cum D volueris, etiam metiri ipſum C, metietur D utrumque C, ac B. Ergo C, B non ſunt primi *c* ax. 8. *d* hyp. *e* 19. l. 7. *f* præc. *g* 23. l. 7. *h* 21. l. 7.

primi inter ſe, quod hypotheſim evertit. Primus ergo erit AB ad C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

SI duo numeri A, B fuerint inter ſe primi etiam A A, quadratus unius, ad reliquum B primus erit.

A 4 B 7
a hyp. AA 16
A 4

Ponatur A bis. Quia igitur A *a* prior primus eſt ad B, etiam A poſterior ad B primus erit. Ergo factus ex A in

b præc. A, hoc eſt AA ad B etiam *b* primus eſt.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duo numeri A, B ad duos numeros C, D, uterque ad utrumque, primi fuerint; etiam ex iis geniti AB, CD inter ſe primi erunt.

a hyp. A B
b 26. l. 7. AB
C D
c hyp. CD

Nam, quia *a* A, & B primi ſunt ad C; etiam *b* AB primus erit ad C. Rurſum, quia A, & B primi ſunt *c* ad D, etiam AB ad D primus erit. Cum igitur C, & D ad AB primi ſint, etiam CD ex iis genitus ad AB

d 26. l. 7. *d* primus erit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

SI duo numeri A, B inter ſe fuerint primi; etiam eorum quadrati AA, BB, cubi AAA,

AAA, BBB, & ſic deinceps, inter ſe primi erunt.

Quoniam A, B ſunt primi inter ſe, etiam AA ad B *a* primus eſt. Et quoniam AA, ac B ſunt primi inter ſe, etiam *b* BB ad AA primus erit. Quod erat primùm demonſtrandum.

A	B
AA	BB
AAA	BBB
AAAA	BBBB

a 27. l. 7.
b per eamd.

Rurſus, quoniam A, B inter ſe primi ſunt, etiam BB ad A *c* primus erit. Ergo B, & BB ad A primi ſunt. Oſtenſum quoque eſt A, & AA ad B eſſe primos. Ergo AAA, genitus ex A in AA, ad BBB, genitum ex B in BB, *d* primus eſt. Quod erat alterum.

c per eamd.
d 28. l. 7.

Denique, quia A, & AA ad B primi ſunt, etiam AAA, ex iis factus, ad *e* B primus eſt. Eodem modo, quia B, & BB ad A primi ſunt, etiam BBB ad A *f* primus erit. Quoniam igitur A, & AAA ad B, item B, ac BBB ad A primi ſunt; etiam ex iis geniti AAAA, BBBB inter ſe *g* primi erunt. Et ſic deinceps in infinitum.

e 26. l. 7.
f ibid.
g 28. l. 7.

PROPOSITIO XXX.

SI duo numeri A, B inter ſe primi fuerint; etiam A+B, uterque ſimul, ad quemlibet illorum primus erit.

Et ſi uterque ſimul A+B ad alterutrum primus fuerit; etiam qui in principio dabantur numeri A, B inter ſe primi erunt.

Pars I. Nam ſi A + B ad A non ſit primus, metietur eos numerus C, qui proinde etiam *a* metietur B. Ergo A, B non ſunt inter ſe primi, quod repugnat hypotheſi.

A + B

C ——

a ax. 11.

Pars II. Si primi non ſint A, B, metietur eos C, qui proinde metietur *b* etiam A + B quod hypotheſim evertit.

b ax. 10.

Corollarium.

SI A + B ad A primus eſt, etiam A + B ad B primus erit. Nam, quia A + B ad A primus eſt, erunt A, B inter ſe primi per II. par. Tum quia jam primi inter ſe ſunt A, B, etiam per I. partem A + B ad B primus erit.

PROPOSITIO XXXI.

O*Mnis primus numerus A ad omnem numerum B, quem non metitur, primus eſt.*

Nam ſi A, B non ſint primi inter ſe, metietur eos aliquis numerus C diverſus ab A, cum A, per hypotheſim, non metiatur B. Ergo C non eſt *a* primus.

A B

C

a def. 11.

PROPOSITIO XXXII.

a def. 25.

S*I planum* a *numerum AB aliquis primus C metiatur; is etiam è plani lateribus A, B alterutrum metietur.*

Pla-

A B
AB
C D——

Planum AB metiatur primus C per D; ſi jam C non metiatur A, erunt C, A *b* primi inter ſe; ideoque in ſuâ proportione *c* minimi. Quia autem C metitur AB per D, ergo C in D *d* facit AB. Sed etiam A in B facit AB. Ergo C eſt ad A, ut *e* B ad D. Quare, *f* cum C, A ſint in ſua proportione minimi, C metietur B. Eodem diſcurſu probabitur, C metiri A, ſi non metiatur B. Liquet ergo propoſitum.

b præc.
c 23. l. 7.
d ax. 8.
e 19. l. 7.
f 23. l. 7.
g 2. l. 7.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnem compoſitum numerum aliquis primus metitur.

F
N——P——

Compoſitus quicunque eſto F. Eum igitur *a* metiuntur unus, vel plures numeri, quorum minimus ſit N. Dico N primum eſſe. Si enim primus non eſt, eum metietur aliquis P, qui proinde, licet minor ſit, quàm N, metietur *b* etiam F. Quod eſt abſurdum, cum N ponatur minimus omnium, qui F metiuntur.

a def. 22.
b ax. 11.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus, aut primus eſt, aut ab aliquo primo menſuratur.

Patet ex præcedenti.

PROPOSITIO XXXV.

NUmeris datis quotcumque A, B, C, minimos ipſis proportionales invenire.

A	B	C
	O—	
D	E	F
P	Q	R
	X—	

a 3. l. 7. Inveniatur a O maxima menſura communis datorum A, B, C, quæ eos metiens, ſeu dividens, faciat D, E, F. Dico hos datis A, B, C eſſe proportionales minimos. Si menſurâ communi careant, erunt ipſi inter ſe primi per 1. Lib. VII. adeoq; minimi in ſuâ proportione per XXIII. Eſſe proportionales D, E, F, patet ex Corol. p. XVIII. Minimos eſſe, ſic oſtendo. Sint, ſi fieri poteſt, alii P, Q, R Minimi proportionales ipſis A, B, C, Ergo P, Q, R metiuntur b A, B, C per eumdem numerum, ut per X. Ergo P in X facit c A. Sed etiam D in O facit d A. Ergo e ut P eſt ad D, ſic O eſt ad X. Sed P volebas eſſe minorem, quàm D. Ergo etiam O minor eſt, quàm X. Jam quia P, Q, R metiuntur A, B, C per X, patet, X in P, Q, R f producere A, B, C, ac proinde X metiri g A, B, C per P, Q, R. Ergo O non eſt ipſorum A, B, C maxima communis menſura, quod evertit hypotheſim.

b 21. & coroll. l. 7.
c ax. 8.
d conſt. & ax. 8.
e 19. l. 7.
f ax. 8.
g ax. 7.

Corollarium.

MAxima menſura quotlibet numerorum ipſos metitur per minimos omnium ipſis proportionalium.

PROPOSITIO XXXVI.

D*Uobus numeris datis A, B; reperire minimum numerum, quem metiuntur.*

A	B
AB	
O	
N	P

Si dati A, B ſunt inter ſe primi, ab iis genitus AB, eſt quæſitus: Nam, quia A in B facit AB, A metietur *a* AB. Et quia B in A facit etiam *b* AB, B metietur AB. Ambo igitur A, & B metiuntur AB. Quod verò minimus ſit AB, quem A, & B metiuntur, ſic oſtendo. Eſto, ſi fieri poteſt, O minor, metianturque A, & B ipſum O per N, & P. Quare *c* A eſt ad B, ut P ad N. Quia autem A, B ſunt *d* primi, erunt minimi in ſuâ *e* proportione; ac proinde A metitur P, *f* & B metitur N. Jam quia A in B facit AB, & idem A in N facit O, ut oſtenſum ſupra, erit, ut *g* B ad N, ſic AB ad O. Sed jam oſtendi B metiri N. Ergo etiam AB metietur O ſe minorem: quod eſt abſurdum.

a ax. 7.
b 16. l. 7.
c cor. p. 19 l. 7.
d hyp.
e 23. l. 7.
f 21. l. 7.
g 19. l. 7.

A	B
C	D
AD vel BC	
O	
N	P.

Si dati A, & B non ſunt primi inter ſe, inveni C, D minimos *h* ipſis proportionales. Tum A in D faciat AD, & B in C gignat BC. Dico AD, ſeu BC (æquales *i* enim ſunt) eſſe minimum, quem A, B metiuntur. Nam ſi velis A, & B metiri O minorem aliquem, quàm AD; eodem diſcurſu, quo ſupra, oſtendam AD metiri O ſe minorem.

h præced.
i 19. l. 7.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo numeri A, & B metiantur aliquem numerum CO; etiam F minimus, quem illi A, & B metiuntur, eumdem CO metietur.

A B
C——D——O
F

Nam ſi F non metitur CO, O ablatus ex C, quoties poteſt, relinquat D O ſe minorem. Quoniam

a hyp. *a* verò, tam A, quàm B metiuntur F, F verò
b ax. 11. metitur CD; etiam *b* A, & B metientur
c hyp. ipſum C D. Atqui A, B metiuntur *c* etiam to-
d ax. 12. tum CO. Ergo metientur, & reliquum *d* DO minorem, quàm F, quod evertit hypotheſim.

PROPOSITIO XXXVIII.

DAtis tribus numeris A, B, C; invenire minimum numerum, quem metiuntur.

a 16. l. 7. A B C

P

R

X

Inveni *a* minimum P, quem A, & B metiuntur. Si tertius C etiam metiatur P, erit P minimus, quem metiuntur A, B, C. Sit enim, ſi fieri poteſt, alius minor R, quem A, B, C metiantur. Ergo P non eſt minimus, quem metiuntur A, B, quod eſt contra hypotheſim.

b per eamd. Quod ſi C non metiatur P, inveni *b* R minimum, quem P, & C metiuntur, & erit R minimus, quem metiuntur A, B, C. Nam, quia

A, B

A, B metiuntur P, & P metitur R; etiam A, & B metientur *c* R. Metitur autem & C ipſum R. Tres igitur A, B, C metiuntur R. Quod verò R etiam minimus ſit, ſic oſtenditur. Eſto, ſi fieri poteſt, X minor, quàm R, quem A, B, C metiantur. Ergo P, minimus, quem metiuntur A, B, metietur etiam *d* X. Ergo cum C, P metiantur X (C ex hyp., & P ex jam demonſtratis) minorem quàm R, non erit R minimus, quem C, P metiuntur. Quod eſt abſurdum contra conſtructionem. *c* pone. *d* per eamd.

Corollarium.

I. EOdem artificio datis quotcunque numeris, invenietur minimus, quem illi metiuntur.

II. Si tres numeri A, B, C, imo quotlibet, aliquem numerum X metiantur, etiam R minimus, quem A, B, C metiuntur, metietur X.

Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, cum A, B *e* metiantur R, etiam P *f* metietur X. Et cum C, P metiantur X (C ex hypotheſi, & R ex jam demonſtratis) etiam R metietur X. Quod erat demonſtrandum. *e* hyp. *f* 37. d. 7.

PROPOSITIO XXXIX.

SI numerus A numerum B metiatur per quotientem C; quotiens erit pars menſ B, à metiente A denominata.

Nam

Nam cum A metiatur B per a ax. 9. C, etiam C metietur B per A, hoc eſt C toties acceptus, quot ſunt unitates in A, faciet B; ac proinde C eſt pars ipſius B ab A denominata.

A 3 B 24
C 4

PROPOSITIO XL.

SI numerus A partem habuerit quamlibet B; metietur illum numerus E partem denominans.

Quoniam B eſt pars numeri A, denominata ab E, ergo B metitur A per E. Ergo viciſſim a ax. 9. E metitur *a* A per B.

A 24 B 6
E 4

PROPOSITIO XLI.

NUmerum reperire minimum, qui partes habeat, à datis numeris A, B, C denominatas.

b 38. 7. Inveniatur *b* minimus G, quem partium denominatores dati A, B, C metiantur. Ajo, G eum eſſe, qui quæritur.

A2 B3 C4
G 12
P6 Q4 R3
X

Metiantur enim A, B, C ipſum G per quotientes P, Q, R. Igitur P, Q, R erunt c 39. 7. *c* partes ipſius G ab A, B, C denominantæ. Quod autem G minimus ſit, manifeſtum eſt. Si enim X minor, quàm G, haberet partes à numeris A, B, C denominatas; A, B, C d præc. *d* metirentur ipſum X: adeoque G non eſſet mini-

minimus, quem metirentur: contra hypotheſim.

Corollarium.

MInimus numerus, quem dati quotcunque numeri A, B, C metiuntur, eſt etiam minimus omnium, habentium partes, à datis numeris denominatas.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER SECUNDUS.

EUCLIDI OCTAVUS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint quotcumque numeri proportionales A, B, C, D, quorum extremi A, D ſint primi inter ſe; erunt A, B, C, D omnium ſibi proportionalium minimi.

A B C D
E F G H

Sint enim, ſi fieri poteſt, alii E, F, G, H, minores, & proportionales ipſis A, B,
a 22.5. C, D. Igitur ex æquo *a* erit A ad D, ut E ad H. Et quia A, & D ſunt inter ſe primi,
b 23.7. erunt ſibi proportionalium minimi; ac proinde
c 21.7. de metientur *c* ipſos E, H ſe minores, quod eſt abſurdum.

Apud Euclidem numeri A, B, C, D ponuntur continuè proportionales, quod non requiri, patet ex demonſtratione.

PROPOSITIO II.

NUmeros, quot placuerit, in ratione datâ A ad B, continuè proportionales minimos reperire.

Sint

Un.			
A 2	B 3		
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA	AAB	ABB	BBB
8	12	18	27

Sint A, B minimi termini rationis datæ. A in A faciat AA, A in B faciat AB, B in B, faciat BB. Erunt AA, AB, BB tres minimi in ratione A ad B.

Quod enim proportionales ſint in ratione A ad B, patet ex XVII. lib. VII. ejuſq; Scholio. Quod minimi, ſic oſtendo. Quia A, B ſunt *a* minimi in ſua proportione, erunt inter ſe *b* primi. Quare etiam eorum quadrati AA, & BB inter ſe *c* primi erunt. Ergo AA, AB, BB, ſunt tres *d* minimi ſibi proportionalium, hoc eſt in ratione A ad B.

a h vp. *b* 24. l. 7. *c* 29. l. 7. *d* præc.

Multiplicans deinde A tres jam inventos, faciat AAA, AAB, ABB; tum B multiplicans tertium BB, faciat BBB: erunt hi quatuor in ratione A ad B proportionales minimi. Quod ſint proportionales in ratione A ad B patet ex XVII. lib. VII. ejuſque Scholio. Quod minimi, patet ex XXIX. lib. VII., & ex præcedentibus.

Nam AAA, BBB ſunt *e* primi inter ſe; ac proinde AAA, AAB, ABB, BBB ſunt quatuor *f* minimi in ſua proportione, quæ eſt A ad B.

e 29. l. 7. *f* præc.

Eodem artificio invenientur minimi quatuor, quinque, & deinceps plures in infinitum.

Corollarium.

I. Trium minimorum numerorum AA, AB continuè proportionalium, extremi ſunt

qua-

quadrati, ſi quatuor fuerint, extremi erunt cubi, & ſic deinceps.

II. Numerorum minimorum continuè proportionalium, jam inventorum, extremi ſunt primi inter ſe, patet ex eorum geneſi, & ex XXIX. lib. VII.

III. Duo rationis datæ minimi A, B metiuntur omnes reliquos infinitos. Cum enim reliquos omnes gignant A, & B, eos quoque metientur, per ax. 7, & corol. prop. XVI. lib. VII.

IV. Unitas, A, AA, AAA, ſunt continuè proportionales: ſimiliter & unitas, B, BB, BBB. Nam, cum A, multiplicans A, faciat AA; erit, ut *g* unitas ad A, ſic A ad AA. Et cum A, multiplicans AA, faciat AAA; erit *h*, ut unitas ad A, hoc eſt, ut A ad AA ad AAA. Ergo &c.

g def. 13.

h per eamd.

5. Inter extremos AAA, & BBB cadunt æquè multi medii, atque inter ipſos, & unitatem: patet ex demonſtratis.

PROPOSITIO III.

SI fuerint quotcunque continuè proportionales A, B, C, D minimi eamdem cum ipſis rationem habentium; extremi A, D inter ſe primi erunt.

a 35. 7.

Inveniantur *a* duo E, F minimi in ratione A ad B. Tum per præced. inveniantur O, P, Q, R totidem minimi in ratione E ad F. Quoniam igitur tam O, P, Q, R, quam A, B, C, D, ſunt minimi

A	B	C	D
	E	F	
O	P	Q	R

mi in ratione E ad F, & æquè multi; eoſdem utrinque numeros illos eſſe neceſſe eſt. Sed extremi O, R ſunt inter ſe primi. Ergo etiam A, D inter ſe primi erunt. Quod erat demonſtrandum. *b* Cor. 2. præc.

Porro ſeriem proportionalium continuè numerorum minimorum, quorum proinde extremi ſunt inter ſe primi, non poſſe ulterius continuari, demonſtrabitur. prop. XVII. lib. IX.

PROPOSITIO IV.

Datis quotcunque rationibus in numeris minimis; eaſdem in minimis etiam numeris continuare.

A ad B.	C ad D		
N	O	P	
Q	R	S	

1. Dentur in minimis terminis rationes duæ A ad B, & C ad D. Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C. *c* 36. 7. Tum quoties B metitur O, toties A metiatur numerum N, & quoties C metitur O, toties D metiatur P. Dico N, O, P eſſe minimos, qui continuant rationes datas A ad B, & C ad D. Quod enim continuent rationes datas, patet ex ipsâ eorum geneſi, vi cujus, ut A eſt ad N, ſic B eſt ad O; & ut C eſt ad O, ſic D ad P. Quare permutando, ut A ad B, ſic N ad O; & ut C ad D, ſic O ad P. Quod minimi ſint, ſic oſtendo. Minores enim, ſi fieri poteſt, Q, R, S continuent rationes datas. Quoniam igitur, ut A eſt ad B, ſic Q ad R, ſuntque A, B in ratione ſuâ minimi, liquet *d* A, B metiri ipſos Q, R. Eandem ob *d* 21. 7. cauſam C, D metientur R, S. Quoniam ergo

D ambo

ambo B, C metiuntur R, etiam O minimus, quem metiuntur B, C, ipſum R metietur, major minorem. Quod eſt abſurdum.

37.7.

2. Dentur in minimis terminis rationes tres A ad B, C ad D, E ad F.

A ad B.	C ad D.	E. ad F.	
N	O	P	Q
R	S	T	V

Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C; & quoties B, C metiuntur O, toties A, D metiantur numeros N, P. Tum ſi E metitur P, fiat, ut toties F metiatur Q. Dico N, O, P, Q, eſſe minimos, qui tres rationes datas continuant.

Quod enim N ſit ad O, ut A ad B, & O ad P, ut C ad D, & P ad Q, ut E ad F, ex ipſâ conſtructione patet. Quod minimi ſint, ſic oſtendo. Continuent minores alii R, S, T, V, ſi fieri poteſt, rationes datas. Oſtendam, ut ſupra, majorem O metiri minorem S. Quod eſt abſurdum.

Si verò E non metiatur P, inveniatur S minimus, quem P, & E metiuntur, & quoties P metitur S, toties O, N metiantur numeros R, Q, item quoties E metitur S, toties F metiatur T. Dico, Q, R, S, T eſſe minimos, qui tres rationes datas continuant.

A ad B.	C ad D.	E ad F.	
N	O	P	
Q	R	S	T
V__	X__	Y__	Z__

Nam ex conſtructione patet, S eſſe ad T, ut E ad F; item Q, R, S proportionales eſſe ipſis N, O, P. Sed N, O, P continuant, ut oſtenſum ſupra, rationes A ad B, & C ad D. Ergo etiam Q, R, S eaſdem continuant, ac proinde, cum etiam ſit, ut E ad F, ſic S ad T;

pate,t

patet, Q, R, S, T continuare tres rationes A ad B, C ad D, E ad F. Quod autem Q, R, S, T minimi ſint, ſic oſtendo. Continuent, ſi fieri poteſt, tres rationes datas minores alii V, X, Y, Z. Quoniam igitur A eſt ad B, ut V ad X, ſuntque A, B minimi *f* in ratione ſuâ; *f* hyp.
B *g* metietur X. Eodem modo oſtendam, *g* 21.7.
etiam C metiri X. Ergo *h* etiam O minimus, *h* 37.7.
quem metiuntur B, ac C, metietur ipſum X. Jam quia ponitur, X eſſe ad Y, ut C eſt ad D, hoc eſt, ut O ad P, etiam permutando X erit ad O, ut Y ad P. Cum ergo O metiatur X, etiam P metietur Y. Sed etiam E metietur Y, (cum E, F ſint in ratione *i* ſuâ minimi, & ve- *i* hyp
lis, ut E ad F, ſic Y eſſe ad Z.) Ergo etiam S minimus, quem E, & P metiuntur, metietur Y, minor majorem. Quod eſt abſurdum.

Eodem artificio in minimis terminis continuabuntur rationes quatuor, & plures deinceps in infinitum.

PROPOSITIO V.

Plani numeri AB, CD rationem inter ſe habent compoſitam ex laterum rationibus.

Nimirum ex rationibus A ad C, & B ad D; vel rationibus A ad D, & B ad C.

B, multiplicans C, faciat BC. Ratio AB ad CD compoſita eſt ex rationibus AB ad BC, & BC ad CD, ut demonſtravi in Elem. Geom. l. V. par. III. n. 12.

AB CD
BC

Sed ratio AB ad BC eſt *a* eadem cum ratione A ad C, & ratio BC ad CD eadem *b* eſt cum ratione B ad D. Ergo etiam ratio AB ad CD compoſita eſt ex rationibus la- (margin: *a* 17.7., *b* ibid.)

terum A ad C, & B ad D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

SI numerorum continuè proportionalium A, B, C, D, E primus A ſecundum B non metiatur; neque ullus ullum metietur.

Quod nullus metiatur proximè inſequentem, patet ex ipſa hypotheſi. Quod vero nec ullus ullum metiatur, ſic oſtendo. Tribus A, B, C inveniantur *a* proportionales minimi N, O, P. Erunt ergo N, P primi inter ſe, eritque ex *b* æquo, ut A ad C, ſic N ad P. Quia vero A eſt ad B, ut N ad O, & A non metitur B, neque N metietur O: ac proinde N non eſt unitas. Quare cum N, P ſint primi inter ſe, N non *c* metietur P. Atqui A eſt ad C, ut N ad P. Ergo neque A metitur C. Eodem modo oſtendam, neque B metiri tertium à ſe numerum D, neque C à ſe tertium E. Et ſi quatuor ſumantur minimi proportionales datis A, B, C, D, ſimili viâ demonſtrabitur, neque A metiri quartum D, neque B à ſe quartum E, & ſic deinceps.

A B C D E

A B C D E
N O P

a 35.7.
b 22.5
c def. 22.

PROPOSITIO VII.

SI numerorum continuè proportionalium A, B, C, D, E, aliquis quempiam alium à ſecundo B metiatur, etiam primus A ſecundum B metietur.

Nam

Nam ſi A non metiatur B, neque ullus ullum ex ſequentibus *c* metietur, quod evertit *c* præc. hypotheſim.

PROPOSITIO VIII.

SI quatuor numeri in eâdem fuerint proportione, ut A ad B, ſic C ad D; quot inter duos primos A, & B, exiſtunt proportionales medii, totidem inter poſteriores duos C, & D exiſtent.

A P Q B
N O R S
C V X D

Inter A, B cadant medii P, Q. Numeris A, P, Q, B inveni *a* proportionales minimos N, O, R, S. Igitur ex æquo *b* erit ut N ad S, ſic A ad B, hoc eſt C ad D. Sunt autem N, S *c* primi inter ſe, ac proinde in ſuâ *d* proportione minimi. Ergo N, S æquè metiuntur *e* ſibi proportionales C, D. Toties O, & R metiantur alios V, X. Quoniam igitur N, O, R, S æquè metiuntur ipſos C, V, X, D, patet C, V, X, D, eſſe proportionales ipſis N, O, R, S, hoc eſt datis *f* A, P, Q, B. Quare cum A, P, Q, B ſint *g* continuè proportionales, etiam C, V, X, D totidem continuè proportionales erunt: ac proinde inter A, B, & inter C, D æquè multi exiſtunt medii proportionales: quod erat demonſtrandum.

a 35.7.
b 22.5.
c 3.8.
d 22.7.
e 21.7.
f hyp.
g hyp.

PROPOSITIO IX.

SI duo numeri C, & D primi inter ſe quot inter ipſos exiſtunt medii

nales, totidem & inter eorum ſingulos, ac unitatem exiſtent.

C	O	P	D
	1.		
	Unitas		
A		B	
AA	AB	BB	
AAA	AAB	ABB	BBB

Inter C, ac D exiſtant medii proportionales O, P. Inveni *a* duos A, B minimos in ratione C ad D; deinde tres AA, AB, BB, demum quatuor AAA, AAB, ABB, BBB, donec inventorum multitudo par ſit multitudini datorum C, O, P, D. Quoniam ergo extremi C, D ſunt *b* primi inter ſe, erunt C, O, P, D *c* minimi ſibi proportionalium, hoc eſt minimi in *d* ratione A ad B. Quare cum AAA, AAB, ABB, BBB ſint etiam *e* minimi in ratione A ad B, erunt hi illis æquales, ſinguli ſingulis. Deinde ex prop. II. hujus, & definit. 13. patet, unitatem, A, AA, AAA, itemque unitatem, B, BB, BBB eſſe continuè proportionales. Quare cum tam multitudo AAA, AA, A, quàm BBB, BB, B cum unitate par ſit multitudini AAA, AAB, ABB, BBB, hoc eſt C, O, P, D, quot medii cadent inter C, & D, totidem cadent inter unitatem, & AAA, ſive C, itemque inter unitatem, & BBB, ſive D. Quod erat demonſtrandum.

C	O	P	D
	1.		
	Unitas		
A		B	
AA	AB	BB	
AAA	AAB	ABB	BBB

a 2. 8.
b hyp.
c 23. 7.
d hyp.
e ex conſt.

PRO-

PROPOSITIO X.

SI inter unitatem, & duos numeros AAA, ac BBB æquè multi medii proportionales exiſtant; etiam inter ipſos AAA, & BBB æquè multi exiſtent medii.

Inſtituatur tota conſtructio propoſitionis II. hujus, eritque manifeſta demonſtratio ex corollario 4., & 5. propoſitionis ejuſdem.

Corollaria.

I. Si fuerint duo ordines ab unitate continuè proportionalium 1, A, AA, AAA, &c. B, BB, BBB, &c.; erit ratio AA ad BB duplicata rationis A ad B, & ratio AAA ad BBB triplicata rationis A ad B, & ſic deinceps.

	Unit.		
	1.		
A		B	
AA	AB	BB	
AAA	AAB	ABB	BBB

Nam AA, AB, BB ſunt continuè *a* proportionales in ratione A ad B. Ergo ratio AA ad BB eſt duplicata *b* rationis AA ad AB, hoc eſt A ad B. Similiter cum AAA, AAB, ABB, BBB ſint continuè *c* proportionales in ratione A ad B; erit ratio AAA ad BBB triplicata *d* rationis AAA ad AAB, hoc eſt rationis A ad B. Et ſic deinceps. Quod erat demonſtrandum.

a ſchol. p. 7. 7.
b def. 12.
c ſchol. 17. 7.
d def. 22.

II. Verum eſt corollarium primum, a quocunquè communi numero C inchoentur ſeries.

Cum enim ſint in proportione continuâ A, B, C, item A, E, F; erit C A *a* par BB, & FA par EE. Sed ratio BB ad EE eſt duplicata rationis B ad E, per XI, quæ ab hac non dependet. Ergo etiam ratio CA ad FA, hoc eſt ratio *b* C ad F, duplicata eſt rationis B ad E: quod erat primum. Pari modo oſtendam, quod ratio DB ad GE ſit duplicata rationis C ad F, ac proinde quadruplicata rationis B ad E: Sed ratio DB ad GE, componitur ex rationibus D ad G, & B ad E. Ergo ratio D ad G cum ratione B ad E eſt quadruplicata rationis B ad E. Ergo ſola ratio D ad G eſt triplicata rationis B ad E: quod erat alterum.

A
B E
C O F
D P Q G

a 20. 7.
b ſchol, p. 17. 7.

III. Si inter numerum A, & duos D, G æquè multi cadant medii proportionales B, C, E, F; etiam inter ipſos D, C, licet alteruter ſit unitas, æquè multi medii cadent.

Patet ex coroll. II. Cum enim ratio D ad G ſit triplicata rationis B ad E; inter D, & G cadent duo *c* medii proportionales in ratione B ad E.

c def. 12.

PROPOSITIO XI.

INter duos quadratos numeros AA, BB unus cadit medius proportionalis AB, & proportio quadrati numeri AA ad quadratum numerum BB duplicata eſt proportionis laterum A, B.

a def. 12. Pars I. AA eſt ad AB *a*, ut A ad B; & AB eſt ad

AA AB BB
A B

BB,

BB, ut A ad B. Ergo *b* AA eſt ad AB, ut AB ad BB. Quod erat primum. 11. 5.

Pars II. Patet ex 1. parte, rationem AA ad BB eſſe duplicatam *c* rationis AA ad AB, hoc eſt *d* rationis A ad B. *c* def. 12. *d* ſchol. 17. 7.

Scholium.

Ex hac, & VIII. præcedente demonſtrari poteſt theorema illud celeberrimum, quod Euclidi eſt libri X. poſtremum: In quadrato diameter lateri incommenſurabilis eſt.

Si enim id negatur, erit diameter ad latus, ut numerus ad numerum, puta ut a *ad* b, *ut patet ex definitione commenſurabilium. Ergo etiam, ut patet ex 22. l. VI. quadratum diametri eſt ad quadratum lateris, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb, *quod fieri non poteſt. Cum enim, ut patet ex 47. l. I, quadratum diametri ſit ad quadratum lateris, ut 2. ad 1, ſi illud ad hoc eſſet, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb, *etiam* aa *eſſet ad* bb, *ut 2 ad 1: ac proinde cum inter* aa, *&* bb *per hanc propoſitionem cadat unus medius integer, etiam inter 2, & 1 caderet medius integer unus, per VIII. Quod eſt abſurdum.* a. b. aa. bb.

PROPOSITIO XII.

Inter duos cubos numeros AAA, & BBB, duo cadunt medii proportinales AAB, ABB; & cubi AAA ad cubum BBB proportio eſt triplicata proportionis laterum A, B.

AAA

AAA AAB ABB BBB Per ſcholium
A B prop. XVII. lib. VII. AAA, AAB, ABB, BBB ſunt continuè proportionales in ratione A ad B, quod erat primum: ex quo, & definitione 12. patet etiam ſecundum.

PROPOSITIO XIII.

Dentur numeri continuè proportionales quotcunque A, B, C, qui in ſeipſos ducti faciant AA, BB, CC, & in hoc rurſum ducti faciant AAA, BBB, CCC, atque ita deinceps in infinitum.

Erunt AA, BB, CC, item AAA, BBB, CCC, & ſic deinceps continuè proportionales.

1. 1. 1. Per corol. 4. prop. II.
A B C hujus; tres ſeries, hic ab
AA BB CC unitate incipientes, ſunt
AAA BBB CCC continuè proportionales.

a coroll. p. 10 8. b hyp. c coroll. p. 10. 8. d 34 5. e coroll. p. 10. 7. f hyp. g coroll. p 10. 7. h 34. 5.

Ergo ratio AA ad BB *a* eſt duplicata rationis A ad B, hoc eſt *b* rationis B ad C. Sed etiam ratio BB ad CC duplicata *c* eſt rationis B ad C. Ergo *d* AA eſt ad BB, ut BB ad CC. Similiter, quia ratio AAA ad BBB eſt triplicata *e* rationis A ad B, hoc eſt *f* B ad C, cujus etiam triplicata *g* eſt ratio BBB ad CCC; erit quoque *h* AAA ad BBB, ut BBB ad CCC. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

SI quadratus numerus AA quadratum numerum BB metiatur, etiam A latus unius metietur B latus alterius.

Et ſi latus A metiatur latus B, etiam quadratus AA quadratum BB metietur.

AA AB BB

A B

Pars I. A in B faciat AB. Per ſchol. p XVII. lib. VII. AA, AB, BB ſunt proportionales in ratione A ad B. Quare cum *a* AA metiatur BB, etiam *b* AA metietur AB. Sed ut AA eſt ad AB, *c* ſic A eſt ad B. Ergo etiam *d* A metitur B: quod erat primum.

Pars II. Ut A eſt ad B, ſic *e* AA eſt ad AB. Sed A jam ponitur metiri B. Ergo etiam AA metitur AB. Rurſum, quia, ut A ad B, *f* ſic AB eſt ad BB, metiturque *g* A ipſum B, etiam AB metietur *h* BB. Ergo AA metietur quoque BB. Quod erat alterum.

a hyp.
b 7. 81.
c ſchol. p. 17. l. 7.
d ax. 11.
e ſchol. p. 17. 7.
f ibid.
g hyp.
h ax. 11.

PROPOSITIO XV.

SI cubus numerus AAA cubum numerum BBB metiatur, etiam latus A metietur latus B, Et è converſo.

AAA AAB ABB BBB

A B

Pars I. Inter utrumque cubum interpone numeros AAB, ABB, quorum geneſim litteræ ſatis indicant. Erunt omnes quatuor *a* continuè proportionales in ratione A ad B. Quare cum AAA

a ſchol. 17. 7.

b hyp. AAA metiatur BBB, *b* etiam AAA *c* metitur
c 7. 8. AAB. Sed AAA eſt ad AAB, *d* ut A ad B.
d ſchol. 17. 7. Ergo etiam A metitur B: quod erat primum.
e ibid. Pars II. Quia AAA eſt ad AAB, ut *e* A ad B, poniturque jam A metiri B, etiam AAA metietur AAB. Pari modo quia AAB, ABB,
f ibid. BBB ſunt *f* inter ſe, ut A ad B, etiam AAB metietur ABB, & ABB ipſum BBB. Ergo
g ax. 1. etiam *g* AAA metitur BBB: quod erat alterum.

PROPOSITIO XVI.

SI quadratus AA quadratum BB non metiatur, neque latus A metietur latus B. Et è converſo.

Pars I. Nam ſi latus A tunc metiatur latus B, etiam AA *a* metiretur BB, contra hypotheſim.

AA	BB
A	B

a 2. par. p. 13. 8.

Pars II. Si latere A non metiente B, metiatur AA ipſum BB, ſequeretur etiam *b* A metiri B, contra hypotheſim.

b 1. par. ejuſd.

PROPOSITIO XVII.

SI cubus AAA cubum DDD non metiatur, neque latus A metietur latus D. Et è converſo.

Demonſtratur ab abſurdo per XV.

Demon-

PROPOSITIO XVIII.

INter duos planos ſimiles AB, CD unus medius proportionalis eſt numerus: & plani ad planum ratio duplicata eſt rationis homologorum laterum A, C.

AB	BC	CD
A	B	C	D

Pars I. Quoniam AB, CD ſimiles plani ſunt, erit latus *a* A ad latus B, ut latus C ad latus D; & permutando A ad C *b*, ut B ad D. Cum igitur AB ſit ad BC, *c* ut A ad C, hoc eſt, quod jam oſtendi, ut B ad D, hoc eſt, *d* ut BC ad CD, erit BC medius proportionalis inter AB, CD: quod erat primum.

a def. 27. *b* 16 5. *c* ſchol. p. 17. 7. *d* ibid.

Pars II. Per I. partem ratio AB ad CD eſt duplicata *e* rationis AB ad BC, hoc eſt *f* rationis A ad C: quod erat alterum.

e defin. *f* ſchol. p. 17. 7.

PROPOSITIO XIX.

INter duos ſimiles ſolidos ABC, DEF duo cadunt medii proportionales BCD, CDE: & ratio ſolidi ad ſolidum eſt triplicata rationis laterum homologorum A, & D.

ABC	BCD	CDE	DEF
A	B	C	D	E	F

Pars I. Quia ſimiles ſolidi ſunt ABC, & DEF, erunt unius latera A, B, C proportionalia alterius lateribus D, E, F. Quare permutando A eſt ad D, ut B ad E, & C ad F. Jam per ſcholium prop. XVI. lib. VII. eſt

ABC

ABC ad BCD, ut A ad D	BCD ad CDE, ut B ad E	CDE ad DEF, ut C ad F

Sed jam oſtendi A eſſe ad D, ut B eſt ad E, & ut C eſt ad F. Ergo etiam ABC eſt ad BCD, ut BCD ad CDE, & CDE ad DEF, ac proinde BCD, CDE ſunt duo medii proportionales inter ABC, & DEF. *Q. F. D.*

Pars II. Jam patet ex I. parte, & definitione XII, rationem ABC ad DEF eſſe triplicatam rationis ABC ad BCD, hoc eſt *a* rationis A ad D. *Q. E. D.*

a ſchol. p. 17. 7.

Scholium.

Videtur hic locus exigere, quando ſolidus numerus ex trium numerorum multiplicatione producitur, ut demonſtremus ex tribus, imo quotlibet numeris, quocumque inter ſe ordine multiplicatis, eumdem ſemper numerum produci. Inſigne theorema eſt, & uſus permagni, quod aliâ quâdam viâ, longèque expeditiori, quàm alii paſſim ſoleant, demonſtrabimus. Sed quoniam ea pendet a permutationibus, quas datus rerum numerus ſubire poteſt, ſit.

Theorema I.

Datæ ſint res, ſeu litteræ quotcumque A, B, C, D, E, & ponantur totidem numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, 5. Hi inter ſe ordinatim multiplicati producent numerum permutationum, quas res datæ A, B, C, D, E ſubire poſſunt.

Theore-

A R I
Theor
audiſſe n
cherrim
tatum p
in lucen
trino
eximiá
ſimili ſe
In quo i
ſolum T
ri, ſed
nes per
cimis,
diviniſ
cis affu
duceba
Du
mus)
mel ul
Hinc
Tr
ſexies
ultim
muta
poſſu
proin
b a c
perm
novi
a ult
perm
ſtum

abc acb bca

bac cab cba.

Quatuor litteræ, a, b, c, d, *permutationes admittunt 24. Nam quælibet ex 4 datis litteris ſemel occupare poteſt locum ultimum, ac tum reliquæ tres ſexies permutari. Unde 24 diverſi ordines quatuor litterarum exiſtunt.*

Quinque a, b, c, d, e *permutationes ſubire poſſunt 120. Qualibet enim ex 5 datis ultimum tenente locum, reliquæ 4 vicibus 24 permutantur: unde litterarum 5 quinquies exiſtunt 24 diverſi ordines, hoc eſt 120. Atque ita in infinitum. Hoc præmiſſo ſit.*

Theorema II.

Pars I. *Tres numeri A, B, C, quocumque inter ſe ordine multiplicati, ſemper æquales gignunt numeros.*

Sex diverſos multiplicationum ordines exhibet tabella appoſita. Quod producta ſint æqualia, cum eadem littera ultimum locum tenet, ut in a b c, & b a c *&c. patet ex XVI. l. VII. Reſtat igitur, ut oſtendam producta* a B c, a C b, b C a, *æqualia eſſe.*	a B c b a c —— a C b c a b —— b C a c b a

a B c
a C b

Comparemus primum a B c, *&* a C b. a B *eſt ad* (a) a C, *ut* B *ad* C. *Sed* B, & C *ſunt iidem numeri, qui* b, & c. *Ergo* a B *eſt ad* a C, *ut* b *ad* c. *Ergo* (b) *productum ex primo* a B *in quartum* c, *hoc eſt* a B c,

(a) ſchol. 17. 7.
(b) 19. 7.

B c, *æquatur producto ex ſecundo* a C *in* b *tertium, hoc eſt ipſi* a C b. *Comparemus jam* a B c, *&* b C a. a B *eſt ad* b C, *ut* a *ad* C, *hoc eſt, ut* a *ad* c. *Ergo productum* a B c *æquatur producto* b C a

a B c
b C a

ſchol. p. 17. 7.
19. 7.

Liquet igitur omnia ſex producta inter ſe æqualia eſſe.

Pars II. Etiam 4 numeri a, b, c, d, *quocumque inter ſe ordine multiplicati, æquales gignent numeros.*

Ex Theor. patet a, b, c, d *admittere 4 ſenarios diverſorum ordinum, hoc eſt ordines diverſos 24. Senarius primus exhibetur in tabella appoſita. Quoniam* a, b, c *quocumque inter ſe ordine multiplicati ſemper eumdem gignunt numerum per I. partem, & ultimus in toto ſenario eſt idem, patet omnia primi ſenarii producta eſſe unum idemque. Eodem modo oſtendam ſex producta ſecundi ſenarii inter ſe convenire. Atque id ipſum de ſenario tertio, quartoque demonſtrabimus. Hoc igitur ſolum reſtat, ut productum unius ſenarii conveniat cum producto cujuslibet ſenariorum trium reliquorum. Quod ſic oſtendo.*

a b c d
b a c d
a c b d
c a b d
b c a d
c b a d

Comparemus ſenarium primum, in quo d *tenet locum ultimum, cum ſenario quarto, in quo* a *locum poſtremum occupat. Scribe* a *infra* d. *Tum ante* d *pone* A, *&* D, *ante* a, *& reliqua præfige utrique litteras* b c. *Igitur* b c A *eſt ad* b c D, (*c*) *ut* A *ad* D, *hoc eſt* a *ad* d. *Ergo producta* (*d*) b c A d, *&* b c D a *ſenarii primi, & quarti æqualia ſunt. Pari modo oſtendam omnium 4 ſenariorum convenire producta. Liquet ergo propoſitum.*

b c A d
b c D a

c ſchol. 17 7.
d 19. 7.

 Pars

Pars III. Eodem diſcurſu ex parte II. oſtendam, producta ex multiplicatione 5 numerorum, quæ ſunt 120, eſſe eadem, atque ita in infinitum, in numeris 6, 7, 8, &c.

PROPOSITIO XX.

SI inter duos planos A, & B cadat unus medius proportionalis C, ſimiles plani erunt.

a 35. 7. Sumantur F, K, *a* minimi in ratione A ad C,
b 21 7. & C ad B. Ergo *b* F, K æquè metiuntur tam ipſos A, C puta per X, quàm ipſos C, B, puta per Z.

A	C	B
	F	K
	X	Z

c ax. 3. Igitur K in X, & Z *c* facit
d 17. 7. C, B, ac proinde, ut X eſt ad Z, *d* ſic C eſt ad B, hoc eſt F ad K: & permutando F ad X,
e hyp. & ax. 8. ut K ad Z. Quare cum *e* F in X faciat A, & K in Z faciat B, ac proinde F, X, & K, Z
f def. 27 ſint latera planorum A, & B; ſimiles *f* plani erunt A, B. *Q. E. D.*

PAULLÒ ALITER.

SI inter duos numeros A, B unus cadat medius proportionalis C, ſimiles plani erunt.

A	C	B
D		E
M		N
DM	EM	EN

a 35. 7. Sumantur *a* D, E minimi in ratione A ad C, & C ad B. Igi-
b 21. 7. tur D, E æquè *b* metiuntur tam A, C, puta per M, quàm C, B, puta per N. Quare
c ax. 8. DM, productum nempe ex D in M, eſt *c* A
d idem. & EM *d* eſt C, &
e idem. *e* EN eſt B. Jam in DM,
f ſchol. p. 27. 7. & EM latus D eſt ad latus E, ut *f* DM ad EM, hoc eſt, ut A ad C, hoc eſt, ut *g* C ad B, hoc
g hyp. eſt,

eſt, ut EM ad EN, hoc eſt, ut *b* latus M ad latus N. Ergo DM, EN, hoc eſt A, B ſunt plani *i* ſimiles. *Q. E. D.*

b ſchol. p. 17. 7. *i* def. 27.

PROPOSITIO XXI.

SI inter duos numeros A, B duo medii proportionales exiſtant numeri C, D, ſimiles ſolidi erunt A, B.

A C D B
EP X OQ
M N
EPM XM XN OQN

Sumantur *a* datis A, C, D tres minimi proportionales EP, X, OQ, qui æquè *b* metientur ipſos A, C, D, puta per M, ac proinde EPM, productum nempe ex EP in M, *c* eſt A, & XM *d* eſt C. Quia autem C, D, B ſunt in eâdem ratione, in quâ A, C, D, erunt EP, X, OQ etiam minimi proportionales ipſis C, D, B, eoſque proinde *e* metientur æquè, puta per N. Quare XN, productum nempe ex X in N, eſt *f* D, & OQN eſt B. Cum igitur EPM ſit A, & OQN ſit B, reliquum eſt, ut oſtendatur latera, E, P, M eſſe proportionalia lateribus, O, Q, N.

A C D B
EP X OQ
M N
EPM XM XN OQN

a 35. 7. *b* coroll. p. 21. 7. *c* ax 8. *d* idem. *e* coroll. p. 21. 7. *f* ax. 8.

Quoniam inter EP, & OQ *g* eſt medius proportionalis X, erunt EP, OQ *h* plani ſimiles; ideoq; *i* E eſt ad O, ut P ad Q. Deinde M eſt ad N, ut *k* XM ad XN, hoc eſt, ut jam oſtendi ſup., ut C ad D; hoc eſt, ut *l* EP ad X. Sed EP eſt, ad X, ut latus P ad latus Q,

g conſt. *h* præced. *i* def. 27. *k* ſchol. p. 17. 7. *l* conſt.

m def. 12. quia tam *m* EP ad X, quàm *n* P ad Q eſt in ra-
n 18. 8. tione dimidiatâ EP ad OQ. Ergo *o* ut P ad Q,
o 11. 12. hoc eſt, ut E ad O, ſic M ad N. Similes igi-
p def. 27. tur *p* ſolidi ſunt EPM, OQN, hoc eſt A, B.
Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

SI trium proportionalium numerorum A, B, C primus A ſit quadratus, tertius C etiam quadratus erit.

A	B	C
O	P	
	1	

Radix, ſive latus quadrati A eſto O. Quoniam igitur O multiplicans ſe facit A, erit, ut unitas (1) ad O, ſic *a* O ad A, ac proinde tam inter A, & 1, quàm inter A, & C unus eſt medius proportionalis. Ergo etiam *b* inter 1, & C unus cadet medius P, qui proinde ductus in ſe *c* facit C. Ergo etiam C quadratus *d* eſt. *Q. E. D.*

a def. 13.
b coroll 3. 10 8
c patet ex def. 13.
d def. 28.

Corollarium.

QUadratus, radix, unitas ſunt continuè proportionales. Patet ex demonſtratis

PROPOSITIO XXIII.

SI quatuor continuè proportionalium numerorum A, B, C, D primus A ſit cubus, quartus etiam cubus erit.

A	B	C	D
P		R	

Cubi A latus eſto O. O in ſe faciat P.
O Q

O Q
1

Igitur O in P *a* facit cubum A. Jam per coroll. præc. 1 eſt ad O, ut O ad P. Et quia O in P facit A, erit ut 1 ad O, hoc eſt, ut O ad P, ſic *b* P ad A. Ergo tam inter A, & 1, quàm inter A, & D cadunt duo medii proportionales. Ergo etiam inter 1, & D duo medii *c* cadent Q. R. Cum ergo ſit, ut 1 ad Q, ſic Q ad R, patet *d* Q in ſe facere R. Et cum ſit, ut 1 ad Q, ſic R ad D, patet *e* Q in R facere D. Ergo *f* etiam D cubus eſt.

a def. 29.
b def. 13.
c coroll. 3. 10. 8.
d def. 13.
e ex ead.
f def. 29.

Corollarium.

UNitas, radix, quadratum, cubus ſunt continuè proportionalia. Patet ex demonſtratis.

PROPOSITIO XXIV.

SI duo numeri A, B eam inter ſe rationem habeant, quam quadratus aliquis C ad quadratum D; primus autem A ſit quadratus, etiam ſecundus B quadratus erit.

A	O	B
C	P	D

Quoniam A eſt ad B, ut C ad D; & inter C, & D unus cadit medius *a* proportionalis P; etiam inter *b* A, & B unus cadet O. Quia igitur primus A quadratus eſt, etiam tertius *c* B quadratus erit. *Q. E. D.*

a 11. 8.
b 8. 1. 8.
c 22. 8.

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri A, B eam inter ſe rationem habeant, quam cubus C ad cubum D; primus autem A ſit cubus, etiam ſecundus B cubus erit.

A	O	P	B
C	Q	R	D

Quia A eſt ad B, ut C ad D, atque inter cubos *a* C, D duo cadunt medii proportionales Q, R, etiam inter A, B duo *b* medii cadent. Quoniam ergo A cubus eſt, etiam B cubus *c* erit. *Q. E. D.*

a 12. 8.
b 8. 8.
c 23. 8.

Corollaria.

I. RAtio quadrati numeri ad non quadratum nequit exprimi in duobus quadratis. Patet ex XXV.

II. Ratio cubi ad non cubum nequit exhiberi in duobus cubis. Patet ex XXV.

PROPOSITIO XXVI.

SImiles plani A, B eam inter ſe rationem habent, quam quadratus aliquis ad quadratum.

A	C	B
D	E	F

Inter A, & B cadit unus *a* medius proportionalis, qui eſto C. In ratione A ad C, ſeu C ad B accipiantur tres minimi D, E, F. Extremi D, F erunt *b* quadrati. Quoniam ergo A eſt ad C, ut *c* D ad E, & C ad B, *d* ut E ad F; erit ex æquo;

a 18. 8.
b coroll. 3. p. 2 l. 8
c conſt.
d conſt.

æquo *e* A ad B, ut quadratus C ad quadratum *e* 22. 7.
F. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII.

Similes ſolidi A, B eam inter ſe rationem habent, quam aliquis cubus ad cubum.

Inter A, & B duo *a* cadunt medii proportionales, qui ſint C, D. In ratione A ad C capiantur quatuor minimi E, G, H, F. Extremi E, & F erunt *b* cubi, eritque ex *b* corol. æquo A ad B, ut E cubus ad cubum F. *Q. E. D.*

a 19. 8.

b corol. 1. p. 2.

A	C	D	B
E	G	H	F

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ
LIBER TERTIUS.
EUCLIDI VERO' NONUS.

PROPOSITIO PRIMA.

D*Uo ſimiles plani A, B, ſe mutuò multiplicantes, quadratum producunt AB.*

A O B

AA P AB

Ex A in ſe faciat AA. Erit igitur

a ſchol. p 17. 7. AA ad AB, ut *a* A ad B. Sed inter

b 18. 8. *b* A, & B cadit unus medius proportionalis, cum ſint A, & B

c 8. 8. plani ſimiles. Ergo etiam inter *c* AA, & AB medius cadet P. Quare cum primus AA ſit quadratus per conſtructionem, etiam tertius

d 22. 8. AB quadratus *d* erit. *Q. E. D.*

PROPOSITIO II.

S*I duo numeri A, B ſe invicem multiplicantes quadratum gignant AB, ſimiles plani erunt.*

A O B

AA P AB.

A in ſe fit AA. Quoniam AA, AB ambo quadrati ſunt,

a 11. 8. cadet inter *a* eos medius pro-

b ſchol. portionalis. Sed AA eſt ad AB, ut *b* A ad B.

17 7. c 8. 8. Ergo etiam inter A, & B *c* cadet medius proportio-

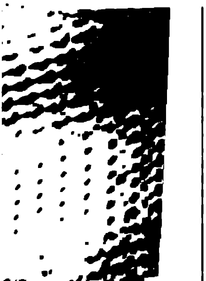
portionalis . E
Q. E. *D.*

I. DUo q
Sunt e
hujus inter ſe
generant .

II. Si duo n
cunt , & alte
etiam B quad
Nam per p
les . Ergo int
tionalis . Cur
etiam tertius
III. Si duo
quadratum ,
dratus non e
Nam , ſi
& B per cor
tum , contr
IV. Quad
ducunt non
II. etiam B
theſim .

P R

CUbus n
facit
CCC
* CC
*
D



ſunt continuè proportionales, adeoque inter 1, & CCC cadunt duo medii proportionales.
a def. 13. Sed, quia CCC in ſeipſum fecit D, erit *a* ut 1
b 2. 8. ad CCC, ita CCC ad D. Ergo etiam *b* inter CCC, & D cadunt duo medii. Quare, cum
c 23. 8. primus CCC ſit cubus, etiam quartus D cubus *c* erit. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

Ex cubo A in cubum B fit cubus AB.

A	B
AA	AB

a praec. Ex a in ſe fit AA. Erit *a* AA cubus. Et quoniam A, & B cubi ſunt, cadent inter eos duo
b 12. 8. medii *b* proportionales. Sed AA eſt ad AB,
c ſchol. p. 17. 7. *c* ut A ad B. Ergo & inter AA, AB *d* cadent duo medii. Quare cum primus A ſit cubus,
d 8. 1. 8. etiam quartus *e* AB erit cubus. *Q. E. D.*
e 23. 8.

PROPOSITIO V.

Si cubus A multiplicans aliquem numerum B gignat AB cubum, etiam multiplicatus B cubus erit.

A	B
AA	AB

Cubus A in ſe faciat AA.
a 3. 9. Erit *a* AA cubus. Quoniam igitur AA, & AB ambo
b 12. 8. cubi ſunt, inter eos cadent duo *b* medii pro-
c ſchol. p. 17. 7. portionales. Sed AA eſt ad AB, *c* ut A ad
d 8. 8. B. Ergo etiam inter A, & B *d* cadent duo medii. Quare, cum primus A cubus ſit,
e 23. 8. etiam *e* quartus B cubus erit. *Q. E. D.*

Corol-

Corollaria.

1. Ex cubo A in non cubum X fit non cubus. Aliàs enim per V. etiam X foret cubus, contra hypotheſim.

2. Si cubus A in B faciat non cubum, neque B cubus erit. Aliàs per IV, etiam factus ex A in B foret cubus, contra hypotheſim.

PROPOSITIO VI.

Si numerus A, in ſe ductus, facit cu B, & ipſe cubus eſt.

A in B producat E. Quoniam A in ſe fecit B, & A rurſum B in B fecit E, patet, E *a* cubum eſſe. Et, quia A in B cubum fecit E etiam B cubus in A facit *b* cubum E A *c* cubus eſt. Q. E. D.

PROPOSITIC

Compoſitus numerus A, mu vis numerum B, genera

Compoſitum numerum A aliquis, præter unitatem, m tiatur *a* numerus, qui ſit per aliquem numerum, D eſt *b* A. Sed A in B multiplicatione trium C d eſt. Q. E. D.

ſunt continuè proportionales, adeoque inter 1, & CCC cadunt duo medii proportionales.
a def. 13. Sed, quia CCC in ſeipſum fecit D, erit *a* ut 1
b 8. 8. ad CCC, ita CCC ad D. Ergo etiam *b* inter CCC, & D cadunt duo medii. Quare, cum
c 23. 8. primus CCC ſit cubus, etiam quartus D cubus *c* erit. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

Ex cubo A in cubum B fit cubus AB.

a præc. Ex a in ſe ſit AA. Erit *a* AA cubus. Et quoniam A, & B cubi ſunt, cadent inter eos duo
b 12. 8. medii *b* proportionales. Sed AA eſt ad AB,
c ſchol.p. 17.7. *c* ut A ad B. Ergo & inter AA, AB *d* cadent duo medii. Quare cum primus A ſit cubus,
d 8. l. 8. etiam quartus *e* AB erit cubus. *Q. E. D.*
e 23. 8.

A B
AA AB

PROPOSITIO V.

SI cubus A multiplicans aliquem numerum B gignat AB cubum, etiam multiplicatus B cubus erit.

Cubus A in ſe faciat AA.
a 3. 9. Erit *a* AA cubus, Quoniam igitur AA, & AB ambo
b 12. 8. cubi ſunt, inter eos cadent duo *b* medii pro-
c ſchol.p. 17.7. portionales. Sed AA eſt ad AB, *c* ut A ad B. Ergo etiam inter A, & B *d* cadent duo
d 8. 8. medii. Quare, cum primus A cubus ſit,
e 23. 8. etiam *e* quartus B cubus erit. *Q. E. D.*

A B
AA AB

Corol-

Corollaria.

1. EX cubo A in non cubum X fit non cubus. Aliàs enim per V. etiam X foret cubus, contra hypotheſim.

2. Si cubus A in B faciat non cubum, neque B cubus erit. Aliàs per IV, etiam factus ex A in B foret cubus, contra hypotheſim.

PROPOSITIO VI.

SI numerus A, in ſe ductus, facit cubum B, & ipſe cubus eſt.

A in B producat E. Quoniam A in ſe fecit B, & A rurſum in B fecit E. patet, E *a* cubum eſſe. Et, quia A in B cubum fecit E cubum, etiam B cubus in A facit *b* cubum E. Ergo & A *c* cubus eſt. *Q. E. D.*

A
B E

a def. 19.
b 17. 7.
c 5. 9.

PROPOSITIO VII.

COmpoſitus numerus A, multiplicans quemvis numerum B, generat ſolidum E.

Compoſitum numerum A aliquis, præter unitatem, metiatur *a* numerus, qui ſit C, per aliquem numerum, qui ſit D. Ergo C in D eſt *b* A. Sed A in B *c* eſt E. Ergo E fit ex multiplicatione trium C D, B. Ergo E ſolidus *d* eſt. *Q. E. D.*

A B E
C D

a def. 12.
b ax. 8.
c hyp.
d def. 16.

Lem-

Lemma.

In ſerie numerorum ab unitate continuè proportionalium 1, A, B, C, D, E, &c., numerus A primus ab unitate, multiplicans quemlibet D, producit ſequentem E.

e def. 13. Erit enim e ut 1 ad A, ita D ad E: ex quo res patet.

PROPOSITIO VIII.

SI numeri quotcunque fuerint ab unitate continuè proportionales; B ſecundus, unitate ſeclusá, quadratus erit, & uno intermiſſo, omnes D, F, H, &c.

Tertius autem C cubus eſt, & duobus intermiſſis, omnes F, K, &c.

Sextus vero F cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermiſſis, omnes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	K.	L.	M.	N.	O.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	&c.					

Pars I. Quoniam, ut 1 eſt ad A, ſic A eſt ad
a def. 13. B: patet a A in ſe facere B, ac b proinde B
b def. 28. quadratus eſt. Deinde quia B, C, D ſunt continuè proportionales, & B quadratus eſt, etiam
c 22. 8. c D quadratus erit: & ſic deinceps uno intermiſſo.

d lem. Pars II. Quoniam A in ſe fecit B, & A rur-
e def. 29. ſum d in B facit C; erit e C cubus. Deinde

quia

quia C, D, E, F ſunt quatuor continuè proportionales, & C cubus eſt, etiam F cubus ff 23. 8. erit, & ſic deinceps duobus ſemper intermiſſis.

Pars III. Patet ex I. & II.

Scholium.

Quoniam primus in ſerie numerus A, multiplicans quemcunque alium ex ſerie, producit ſequentem, liquet continuè proportionalium ſeriem pulcherrimè exprimi ſolâ litteræ A, numerum quemlibet deſignantis, continuâ appoſitione, hunc in modum.

0	1	2	3	4	5	
1.	A.	AA.	AAA.	AAAA.	AAAAA.	A 6.
A 7.	A 8.	A 9.	A 10.	A 11.	A 12.	

A quippe in ſeipſum, facit AA quadratum: A in AA, facit AAA cubum, & ſic deinceps. Quin verò ſic tota propoſitionis demonſtratio uno intuitu perſpicitur. Quoniam enim multiplicationis productum litterarum appoſitione exhibetur, liquet quadratum eſſe, cum litterarum multitudo par eſt, quam proinde binarius metiatur, ut ſit loco ſecundo, quarto, & ſequentibus, uno intermiſſo. Rurſum liquet, tum eſſe cubum, cum numerum litterarum metitur ternarius, ac proinde triſecari poteſt, quod evenit loco tertio, ſexto, & ſequentibus, binis ſemper intermiſſis. Denique apparet, cum litterarum multitudo eſt numerus primus, ut 5, 7, 11, 13, &c., nec cubum haberi, nec quadratum, quia nimirum, cum primos numeros nullus numerus metiatur [illegible] multitudo

tum

tum nequit aut biſecari, quod ad quadraticam, aut triſecari, quod ad cubicam multiplicationem requiritur. Solent ab Arithmeticis hi numeri ſurdeſolidi, ſive ſuperſolidi appellari. Omnes autem reliqui progreſſionis termini vel quadrati, vel cubi ſunt, vel utrumque, quia cum numeri litterarum, ſeu dimenſionum, quibus conſtant, ſint compoſiti, eos vel binarius, vel ternarius, vel uterque metitur; ac proinde aut biſecari poſſunt, aut triſecari, aut utrumque.

Solent porro numeri progreſſionis jam dicta vocari poteſtates, ac ſcribi ſupra eos numeri ordine naturali, qui locum, ſeu dimenſiones ſingulorum indicent, dicunturque exponentes. Itaque in priori ſerie, quâ ante Scholium uſi ſumus, A eſt primus terminus, vocaturque radix; B ſecundus, ſeu duarum dimenſionum, & quadratus dicitur; C tertius, ſeu trium dimenſionum, & cubus appellatur, &c. In alterâ ſerie ipſa litterarum multitudo locum, latera, ac dimenſiones poteſtatum ſingularum exprimit.

Ex dictis ſupra patet I. in quâcumque ſerie continuè proportionalium, terminum, cujus exponens eſt 6, eſſe ſimul cubum, & quadratum: numerus enim laterum ejus, cum menſuretur a 2, & 3, poterit biſecari, ac triſecari. II. intermiſſis ſemper 5, reliquos omnes fore cubos ſimul, & quadratos, terminum videlicet 12, 18, 24, & cæteros, quorum exponentes ſenarius metitur. Cum enim tam 2, quàm 3 metiantur 6, 6 autem metiatur 12, 18, 24, &c. etiam tam 2, quàm 3 eoſdem omnes metientur, qui proinde, & biſecari poterunt, & triſecari. Ergo, &c.

PRO-

PROPOSITIO IX.

SI in ſerie continuè proportionalium ab unitate numerorum primus A ſit quadratus, reliqui omnes quadrati erunt.

Si primus eſt cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt.

Pars I. Quoniam A per hypotheſim, & B per præc. quadrati ſunt, & A in B facit C, etiam *a* C quadratus erit. Rurſum, quia quadratus A in quadratum C *b* facit D, etiam D quadratus erit. Et ſic deinceps.

1 A B C D E F

a coroll. 2.9.
b lem.

Pars II. Quoniam A per hypotheſim cubus eſt, & A in ſe facit B, etiam B cubus erit. Et quia A cubus in B cubum *d* facit C, etiam *e* C cubus erit. Et ſic deinceps.

c 3.9.
d lem.
e 4.9.

PROPOSITIO X.

SI continuè proportionalium ab unitate numerorum primus A quadratus non ſit, neque alius ullus quadratus erit, præter ſecundum B, & reliquos, uno ſemper intermiſſo, ſequentes D, F, &c.

Et ſi primus A non ſit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter tertium C, & reliquos, duobus intermiſſis, ſequentes F, &c.

Pars I. Sit enim, ſi fieri poteſt, E quadratus. Quoniam igitur E eſt ad D, ut B ad A, ſuntque quadrati *a* E, *b* D, B, etiam *c* A quadratus erit, contra hypotheſim.

1 A B C D E F G

a quia ponitur.
b. 18.9.
c 24.5.

Pars

Pars II. Eſto, ſi fieri poteſt, D cubus. d 8. 9. Cum ergo etiam cubi ſint *d* F, & C, ſitque per hypotheſim, & ex æquo, ut F ad C, ſic D ad A, e 25. 8. etiam A *e* cubus erit, contra hypotheſim.

PROPOSITIO XI.

IN ſerie numerorum ab unitate continuè proportionalium minor quilibet C quemlibet majorem G metitur per aliquem numerum, qui eſt in ſerie.

1 A B C D E F G

f def. 15. Ex æquo enim C eſt ad G, ut 1. ad D. Ergo C metitur *f* G per D.

Corollaria.

I. QUantum major G diſtat a metiente C, tantum D, is per quem minor majorem metitur, diſtat ab unitate.

II. Primus A metitur quemlibet D per præcedentem C.

III. Quivis in ſerie numerus C, ſeipſum multiplicans, producit numerum F, eodem a ſe intervallo diſtantem, quo ipſe ab unitate.

IV. Si quivis in ſerie numerus B multiplicet quemvis D etiam in ſerie, quantum diſtat 1 a minore B, tantum diſtabit major D a producto F.

PRO-

PROPOSITIO XII.

SI ab unitate fuerint numeri quotcumque continuè proportionales; primus numerus E, qui metitur ultimum D, metietur & unitati proximum A.

1 A B C D
E H G F

Ponatur enim, ſi
ſieri poteſt, E primum
non metiri A. Ergo *a*
E, & A ſunt primi inter ſe. Quoniam verò E *a* 3. 7.
metitur D, metiatur eum per F. Metitur autem
& A eumdem *b* D per C. Ergo E eſt ad A, ut *b* coroll.
c reciprocè C ad F. Sed quia E, & A ſunt pri- 2. præc.
mi inter ſe, erunt minimi *d* in ſuâ proportione. *c* corol. 1.
Ergo E metitur C, *e* puta per G. Quare, cum 19. 7.
eumdem C metiatur *f* A per B, rurſum erit E *d* 23. 7.
ad A, *g* ut B ad G. Ergo quia E, A ſunt in ſuâ *e* 21. 7.
proportione minimi, iterum E metitur *h* B, *f* coroll.
puta per H. Atqui etiam A metitur B per A; 2. præced.
nam A in ſe facit B, ut patet ex VIII. Ergo rur- *g* corol. 1.
ſum *i* E eſt ad A, ut A ad H. 19. 7.

A A
E H

Quare, cum E, A ſint in pro- *h* 21. 7.
portione ſuâ minimi, E *k* metitur *i* coroll. 19. 7.
A. *Q. E. D.* *k* 21. 7.

Scholium.

PUlchra, & ſubtilis hæc demonſtratio eſt, in qua ex contradictorio aſſertionis aſſertio ipſa directa demonſtratione infertur. De hoc genere demonſtrationis vide, ſi lubet, quæ diſſeruimus in Appendice poſt Elementa Geometriæ.

F PRO-

PROPOSITIO XIII.

Si numerorum ab unitate continuè proportionalium proximus unitati A primus eſt; maximum D nullus alius metietur præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

1	A	B	C	D
	E	F	G	H
	O			

I. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, E diverſus ab ipſis A, B, C, maximum D. Non erit E primus, aliàs etiam E metiretur *a* A, ac proinde A non eſſet primus, contra hypotheſim. Igitur E compoſitus eſt; ac proinde eum metitur *b* aliquis primus.

a præc.
b 34. 7.

II. Quem dico eſſe A. Si enim alius primus O metiretur E, quoniam E metitur D, etiam O *c* metiretur D, adeoque *d* & ipſum A: quod eſt abſurdum, cum A primus ſit. Metiatur jam E ipſum D per H.

c ax. 11.
d præc.

1	A	B	C	D
	E	F	G	H
	O			

III. Erit H diverſus ab A, B, C. Sit enim, ſi fieri poteſt, H idem cum aliquo ipſorum A, B, C, puta cum C. Ergo E metietur D per C, ac proinde etiam C *e* metitur D per E. Ergo E eſt unus *f* ex ſerie A, B, C: quod eſt abſurdum, cum E volueris eſſe non unum ex ſerie A, B, C. Ergo H diverſus eſt ab ipſis A, B, C.

e ax. 9.
f 12. 9.

IV. Deinde H non erit primus, aliàs cum H metiatur D, metiretur *g* quoque A, primum ex hypotheſi: quod eſt abſurdum. H igitur compoſitus eſt.

g præc.

V. Quia autem H compoſitus eſt, metietur

eum

eum aliquis primus, quem dico eſſe A. Si enim alius primus O metietur H, cum H metiatur D, (nam quia E per H metitur D, etiam H *b* per E metietur D) metietur quoque *i* O ipſum D, ac proinde etiam *k* ipſum A primum: quod eſt abſurdum. *b* ax. 9. *i* ax. 11. *k* præc.

VI. Jam quia A metitur *l* D per C, itemque E metitur D, per H; erit, ut A ad E *m*, ita reciprocè H ad C. Quare, cum, ut oſtendi num. I., A metiatur E, etiam H metietur C, puta per G. Quoniam igitur, ſicut E diverſus ab A, B, C metiebatur poſtremum D per H, ita nunc H (quem jam oſtendi num. III. diverſum eſſe ab A, B, C,) metitur ipſorum A, B, C poſtremum C per G: Oſtendam eodem modo G diſtinctum eſſe ab A, B, & non eſſe primum, & menſurari ab A, quo hæc tria oſtendi de numero H. *l* coroll. 2. 11. 9. *m* coroll. 19. 7.

Quia ergo A metitur C *n* per B, & H metitur C per G: erit, ut *o* A ad H, ita reciprocè G ad B. Sed oſtendi num. V. A metiri H. Ergo etiam G metitur B, puta per F. Oſtendam rurſus F diverſum eſſe ab A, planè, ut oſtendi num. III. H eſſe diverſum ab A, B, C, & G ab A, B. *n* coroll. 2. 11. 9. *o* coroll. 19. 7.

Quoniam igitur A per A, hoc eſt per ſe, metitur B, & G per F metitur B; erit, ut A ad G, *p* ſic reciprocè F ad A. Sed eſt oſtenſum num. VI. A metiri G. Ergo etiam F metitur A: quod eſt abſurdum, cum A primus ſit. Sed hoc abſurdum inde deductum eſt, quod poneretur, E diverſum ab A, B, C, metiri D. Liquet ergo nullum ab A, B, C diverſum metiri D. *Q. E. D.* *p* coroll. 1. 19. 7.

Scholium.

HÆc demonſtratio, quæ ratiocinationis flexu mirabili tandem infert quæſitum, meritò e difficilioribus una videri poteſt. Breviorem aliam ſubſtituit Claudius Richardus noſter, Euclidis Commentator præclarus; ſed eâ nonconfici propoſitum, facilè intelliget, qui legerit.

PROPOSITIO XIV.

MInimum numerum A, quem primi numeri B, C, D metiuntur, nullus alius primus, præter datos, metitur.

A
B C D
E F

Metiatur, ſi fieri poteſt, minimum A alius quiſpiam primus E
a ax. 8. per F. Ergo E in F facit *a* A, ac proinde E, F ſunt latera ipſius A. Quoniam ergo B, C, D metiuntur A, me-
b 32. 7. tiuntur quoque *b* alterutrum E, F. Non E primum. Ergo F. Sed F minor eſt, quàm A: nam F in E facit A. Ergo A non eſt minimus, quem metiuntur B, C, D. Quod hypotheſim evertit.

PROPOSITIO XV.

SI fuerint tres proportionales in ratione ſua minimi AA. AB, BB; duo quilibet compoſiti ad reliquum primi erunt.

A B
AA AB BB

Ex prop. II. lib. VIII. manifeſtum eſt, ſi A, B duo minimi ponantur in ratione datâ; AA,

AB,

AB, BB fore tres minimos in eâdem ratione.
Jam quia A, & B ſunt *a* primi inter ſe, etiam *a* 24.7.
b A+B ad B primus eſt. Sed etiam A ad B pri- *b* 30.7.
mus eſt. Ergo etiam *c* factus ex A + B in A, *c* 26.7.
nempe AA + AB, ad B primus eſt. Quare
AA + AB ad BB etiam *d* primus erit, Eodem *d* 27.7.
planè modo oſtendam, BB + AB ad AA eſſe
primum.

Reliquum eſt, ut etiam AA + BB ad AB
primus ſit. Quoniam A, B ſunt primi inter ſe,
ac proinde *e* etiam tam A, quàm B ad A + B *e* 30.7.
primus eſt; erit quoque AB, genitus ex A in
B, ad A + B *f* primus. Ergo AB ad *g* ipſius *f* 26.7.
A+B quadratum, hoc eſt ad *h* AA + BB + *g* 4.2.
2 AB, primus eſt. Ergo dividendo AB pri- *h* 27.7.
mus *i* eſt ad AA + BB + AB. Ergo rurſum *i* 30.7.
k dividendo AB primus eſt ad AA + BB, *k* ibid.
Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

D*uobus numeris inter ſe primis A, & B, nequit tertius proportionalis exhiberi.*

A	B	b	C
5	7	7	

Sit enim, ſi fieri poteſt, ut A ad B, ſic b
ad alium C. Quia primi ſunt inter ſe A, & B, erunt *a* minimi ſibi *a* 23.7.
proportionalium. Ergo A *b* metitur b. Sed *b* 21.7.
etiam A metitur ſe. Ergo A, & b ſunt inter *c* *c* def. 24.
ſe compoſiti, contra hypotheſim. Quod eſt
abſurdum.

PROPOSITIO XVII.

SI in continuè proportionalium ſerie extremi A, D ſunt primi inter ſe, ea non poterit ulterius continuari.

Sit enim, ſi fieri poteſt, ut A ad B, & B ad C, &c. ſic D ad alium E. Igitur permutando, ut A ad D, ſic B ad E. Sed A, & D ſunt *a* inter ſe primi, ac proinde *b* minimi in ſuâ ratione. Ergo *c* A metitur B. Sed B metitur *d* C, & C metitur D. Ergo A *e* metitur D. Sed & A metitur ſe. Ergo *f* A, & D ſunt inter ſe compoſiti: contra hypotheſim.

A B C D E

a hyp.
b 23. 7.
c 21. 7.
d 1. 9.
e ax. 11.
f def. 24.

PROPOSITIO XVIII.

DUobus numeris datis A, B conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis exhiberi.

Si A, B ſunt primi inter ſe, non poſſe reperiri tertium, patet ex XVI.

A B X
BB

Si A, B ſunt inter ſe primi, B in ſe faciat BB. Si A metitur BB, puta per X; erit X tertius proportionalis. Nam X in A *a* facit BB. Sed & B in ſe facit BB. Ergo *b* A eſt ad B, ut B ad X.

a ax. 8.
b 20. 7.

Si A non metitur BB, non poterit exhiberi tertius proportionalis. Detur enim, ſi fieri poteſt, Z. Ergo A in Z facit BB, eumdem *c*, quem

A B Z
BB

c ibid.

quem B in ſe. Quia ergo A in Z eſt BB, A per Z metietur *d* BB: contra hypotheſim. *d* ax. 7.

PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis A, B, C conſiderare, an quartus proportionalis poſſit exiberi.

A B C X
BC

Secundus B, in tertium C ductus, faciat BC. Si primus A metitur BC, puta per X; erit X quartus proportionalis. Nam tunc A in X *a* faciet BC, æquè ac B in C. *a* ax. 8. Ergo *b* ut A ad B, ſic C ad X. *b* 19. 7.

A B C Z
BC

Si A non metitur BC, non poterit exhiberi quartus proportionalis. Detur enim Z, ſi fieri poteſt. Ergo A in Z *c* faciet *c* 19. 7. BC, eumdem, quem B facit in C. Ergo A *d* *d* ax. 7. metietur BC per Z: contra hypoteſim.

Scholium.

Propoſitiones quatuor præcedentes intelligendæ ſunt de numeris integris. Quibuſvis enim duobus numeris tertius, & quibuſvis tribus quartus proportionalis exhiberi poteſt per fractiones, ut docebitur in Arithmeticâ practicâ.

Hoc verò obſervatu dignum eſt, quod ſuo e loco demonſtrabimus, quamvis duobus quibuslibet tertius proportionalis, & tribus quartus, ſaltem fractus, dari poſſit, tamen inter quos medius integer dari nequit, inter eos neque fractus quidem ullus poterit exhiberi. *e* Arith. pract. l. 5. c. 7.

A B C Z
D

Datis tribus numeris, A, B, C, quartus proportionalis invenitur etiam hunc in modum.

Primus A, dividens ſecundum B, faciat quotientem D. Tertius C, multiplicans D, gignat Z. Hic eſt quæſitus.

f ax. 8. *Cum enim A dividat B per D, etiam* f *A in*
g 17.7. *D faciet B. Sed & C in D* g *gignit Z. Ergo A*
h 17.7. *eſt ad B,* h *ut C ad Z.*

Impoſſibilis erit quartus proportionalis integer, non ſi A non metitur B, ſed ſi factus ex C in D non ſit integer, aut ad integrum reducibilis.

PROPOSITIO XX.

P*Rimi numeri ſunt infiniti.*

A B C
X + 1.
Z

Dentur primi tres A, B,
a 38.7. C. Inveni X minimum, *a*
quem A, B, C metiuntur, cui adde unitatem. Si X + 1. primus eſt, jam quartus habebitur primus. Si
b 34. 7. X + 1 non eſt primus, eum aliquis *b* primus
metietur, puta Z. Hic erit primus, a datis A, B, C diverſus. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem cum datorum aliquo C. Ergo, quia C metitur X, etiam Z metietur X. Sed Z etiam metitur X + 1. Ergo Z metietur *c* quoque 1: quod eſt
c ax. 12. abſurdum. Ergo Z novus primus eſt. Eodem modo invenientur plures ſine termino.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

NUmeri pares quotcumque A, B, C componunt parem.

A B C
N O P

Quoniam A, B, C pares ſunt, eorum *a* ſemiſſes ſint N, O, P. Quia igitur eſt, ut A ad N, ſic B ad O, & C ad P; erit ut A ad N, *b* ſic ſumma A, B, C ad ſummam N, O, P. Sed A eſt duplus ipſius N. Ergo ſumma A, B, C dupla eſt ſummæ N, O, P, adeoque ſumma N, O, P eſt ſemiſſis ſummæ A, B, C. Ergo ſumma A, B, C *c* par numerus eſt. *Q. E. D.*

a def. 16.
b 12. 5.
c def. 16.

PROPOSITIO XXII.

IMpares A, B, C, D multitudine pari componunt parem.

A B C D

Aufer à ſingulis unitatem. Tum & *a* reliqui pares erunt, & unitates ablatæ *b* parem component. Quare per præcedent. reliqua, & ablata ſimul, hoc eſt ipſi A, B, C, D component parem.

a def. 17.
b hyp.

PROPOSITIO XXIII.

IMpares A, B, C multitudine impari componunt imparem.

Quoniam *c* impar à pari differt unitate, erit C — 1 par.

A B C —
C 1

c def. 17.

d præc. par. Sed & impares A, B *d* componunt parem. Ergo A, B, C—1 componunt parem. Sed ſumma A, B, C—1 ab ſummâ A, B, C differt unitate. Ergo ſumma A, B, C eſt nume-
e def. 17. rus *e* impar. *Q. E. D.*

Corollarium.

PAri ratione impar additus pari componit imparem.

PROPOSITIO XXIV.

SI a pari numero D ſubtrahatur par E, reliquus F par erit.

Nam ſi reliquus F foret impar, cum pari E componeret *a* imparem Sed F cum E componit D. Ergo D impar eſſet: contra hypotheſim.

a coroll. præc.

D
E
F

PROPOSITIO XXV.

SI a pari numero A impar B ſubtrahatur, reliquus C erit impar.

Nam ſi reliquus C eſſet par, is cum impari B faceret *b* imparem, Sed C cum B facit A. Ergo A foret impar: contra hypotheſim.

b coroll. 23.7.

A
B
C

PROPOSITIO XXVI.

SI ab impare E ſubtrahatur impar F, reliquus G erit par.

Nam

Nam ſi G foret impar, is cum impare F componeret E *c* parem. Quod evertit hypotheſim. E F G *c* 22. 9.

PROPOSITIO XXVII.

SI ab impare A ſubtrahatur par B, reliquus C erit impar.

A B C Nam ſi C foret par, is cum pari B componeret *a* A parem: contra hypotheſim. *a* 22. 9.

PROPOSITIO XXVIII.

PAr, & impar A, B invicem multiplicantes producunt C parem.

A 2. B 3. C 6. Componitur *b* enim C ex pari A toties ſumpto, quot ſunt unitates in B. Ergo C par *c* eſt. *b* def. 14. *c* 21. 9.

Corollaria.

I. PAr multiplicans parem gignit parem. Patet eodem modo ex XXI.

II. Omnis pariter impar eſt par. Patet ex defin. XIX., axioma. VII., & hac propoſitione.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar D multiplicans imparem E producit imparem F.

a def. 13. D 3. E 5. F 15

Componitur *a* enim F ex D impare toties ſumpto, quot ſunt unitates in impare E. Ergo F impar *b* eſt.

b 23. 9.

Corollaria.

12 B { C 4. 3 A

I. Impar A metiens parem B eum metitur per parem C. Nam ſi C foret impar, quia A in C *c* producit B, eſſet B *d* impar, utpote genitus ex impare A in imparem C. Quod repugnat hypotheſi.

c ax. 8.
d 29. 9.

15 E { F 5. 3 D

II. Impar D metiens imparem E eum metitur per imparem F. Nam ſi F foret par, quoniam D impar in F parem gignit *a* E, eſſet E *b* par: contra hypotheſim.

a ax. 8.
b 28. 9.

Scholium.

Ex his demonſtrari jam poterit, nullum numerum AB ita ſecari poſſe, ut genitus ex toto AB in unam partem CB ſit æqualis quadrato partis alterius AC: ac proinde propoſitionem XI. lib. II. nullo modo poſſe numeris applicari, quamvis decem primæ ejuſdem libri propoſitiones omnes etiam in numeris ſint veræ.

A———C———B
D—E—

Sit enim, ſi fieri poteſt, genitus ex AB in CB par quadrato ex AC.

Vel AC par eſt, & CB impar.
Vel AC impar, & CB par.
Vel uterque AC, & CB impar.
Vel uterque par.

Eſto

Eſto primum AC par, & CB impar. Ergo a coroll.
totus AB eſt a *impar. Ergo genitus ex AB im-* 23. 9.
pare in CB imparem, impar b *eſt. Eſt* c *verò* b 29. 9.
par quadratus, ex AC pari. Ergo impar, c coroll. 28. 9.
genitus ex AB in CB, æquatur pari, nempe quadrato ex AC. Quod eſt abſurdum.

Sit deinde AC impar, & CB par. Ergo totus AB d *impar eſt. Ergo factus ex impare* d coroll.
AB in CB parem par e *eſt. Atqui quadratus* 23. 9.
imparis AC impar f *eſt. Ergo rurſum hic im-* e 28. 9.
par illi pari æqualis eſt. Quod eſt abſurdum. f 29. 9.

Sit tertiò uterque AC, CB impar. Ergo totus AB g *par eſt. Ergo factus ex AB pari in*
imparem CB par h *eſt. Imparis autem AC qua-* g 21. 9.
dratus i *impar eſt. Ergo rurſum hic impar illi* h 28. 9.
pari ex AB in CB æqualis eſt. Quod eſt abſurdum. i 29. 9.

Sit denique uterque AC, CB par. Sumantur duo minimi D, E in ratione AC ad CB. Erunt D, E primi k *inter ſe, ac proinde nequeunt* k 24. 7.
ambo eſſe pares, aliàs metiretur eos binarius; ſed vel ambo ſunt impares, vel D par, E impar, vel D impar, E par. Jam, quia AB in CB æquatur quadrato AC, erit, ut AB ad AC, ita AC ad CB. Et quia E eſt ad D, ut BC ad CA, erit componendo E cum D ad D, ut BA ad AC; hoc eſt, ut l *AC ad CB, hoc eſt, ut* m *D ad E. Quoniam igitur D cum E eſt ad* l oſtendi ante.
D, ut D ad E, erit genitus ex D cum E in E æqualis quadrato ex D. Quod fieri non poſſe, m hyp.
tribus primis partibus demonſtratum eſt.

At quiſpiam ſuſpicabitur ita ſecari fortaſſis numerum poſſe in duas partes, quibus fractiones adhæreant. Verum ſi illæ partes reducantur

ad

ad duas fractiones ejuſdem denominationis, ut docebitur in Arithm. Pract. lib. II. c. III. prob. II. facilè apparebit, ne id quidem eſſe poſſibile.

PROPOSITIO XXX.

SI impar B metiatur parem A, & illius dimidium metietur.

Impar B metiatur A 12 A { C 4

parem per C. Erit *a* C 3 B

a coroll. 1. 9. par, & C metietur quo-

b 9. 9. que A *b* per B. Ergo & dimidium ipſius C me-

2 ax. 9. tietur dimidium ipſius A per B (eſt enim ut C ad A, ſic dimidium C ad dimidium A.) Ergo etiam B per dimidium C metietur *c* dimidium

c idem. A. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXI.

SI impar A ad aliquem B primus eſt, etiam ad illius duplum C primus erit.

Nam ſi A, & C non A 3. B 5.

ſint primi inter ſe, me- C 10. D E

tiatur eos aliquis D, A quidem per E. Erit D neceſſariò impar, aliàs

a 28. 9. D par in E gigneret A *a* parem. Quoniam ergo D impar metitur C parem (eſt enim C par, cum duplus ſit B,) etiam D metietur *b* B ejus

b præc. dimidium. Ponebas autem etiam D metiri A. Ergo A, B non ſunt primi inter ſe: contra hypotheſim.

Corol-

Corollarium.

IMpar A, qui primus eſt ad aliquem B, etiam primus eſt non ſolum ad duplum B, ſed etiam ad quadruplum, octuplum, &c. Patet ex propoſitione.

PROPOSITIO XXXII.

SI proportio dupla ab unitate continuetur in infinitum 1, 2, 4, 8, 16, *&c. habentur omnes pariter pares tantùm.*

1 A B C D E F
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.
1 R P O

Quod ſinguli ſint pariter pares, patet ex XI. l. IX. Per hanc enim 2. metitur quemlibet in ſerie, per aliquem ex ſerie, hoc eſt per parem. Ergo per definitionem XVIII.

Quod ſint pariter pares tantùm, patet ex XIII. lib. IX. Cum enim 2 proximus unitati ſit primus, nullus metietur ullum ipſorum 2, 4, 8, &c. præter eos, qui ſunt in ſerie, hoc eſt præter pares. Ergo per definitionem XVIII.

1 A B C D E F
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.
1 R P O.

Quod nullus præter hos ſit pariter par tantùm, ſic oſtendo. Eſto tantùm pariter par quicumque O, cujus dimidium ſit P, hic erit par; aliàs ſi P foret impar, binarius per imparem P metiretur O, adeoque O eſſet pariter impar: contra hypotheſim. Semiſſis ergo ipſius P eſto R. Hic rurſum erit par; ſi enim R eſſet impar, cum ſit quarta pars ipſius O, nume-

rus

rius 4. per imparem R metiretur D: rurſus contra hypotheſim. Atque ita ſemper ſemiſſis prioris erit par, donec veniatur ad 1. Sit ergo 1 ſemiſſis ipſius R. Erunt igitur R, P, O ab unitate dupli, ac proinde O unus ex ſerie. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI omnes numeri impares duplentur, provenient omnes pariter impares tantùm 6. 10. *&c.*

3.	5.	7.	9.	11.
6.	10.	14.	18.	22.
A	B	C	D	E
			7 N	2.
			P	Q

Singuli pariter impares ſunt, quia eorum ſemiſſis eſt *a* impar, adeoque metietur binarius ſingulos per ſemiſſem imparem.

a hyp.

Eſſe pariter impares tantùm, ſic oſtendo, Sumatur quilibet ex illis, puta D, cujus ſemiſſis eſto N, & apponatur binarius. Si Ergo D eſt

b def. 18. etiam pariter par, metiatur *b* eum P par per parem Q. Quoniam igitur N per 2 metitur

c corol. 1. 19. 7. eumdem D, erit *c* Q ad N, ut 2. ad P. Sed 2 metitur P parem. Ergo etiam Q par metitur imparem N: quod eſt abſurdum contra XXI. lib. IX.

Quod nullus præter hos ſit pariter impar tantùm, ſic oſtendo. Si quis præter hos eſſet

d coroll. 28. 9. alius, is deberet *d* eſſe par. Pares autem numeri aut habent partes dimidias, ac proinde ſunt ab unitate dupli, adeoque per præcedentem ſunt pariter pares tantùm; aut habent dimidios impares, & ſic per ſequentem ſunt pariter pares, & pariter impares. Ergo, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

PAres numeri A, B, C, D, E, qui nec a binario dupli ſunt, nec dimidium habent imparem, ſunt pariter pares, & pariter impares. Et præter hos alius nullus.

Singuli pariter pares ſunt,

12.	20.	24.	28.	36.	40.	44.	48.
A	B	C	D	E	F	G	H

quia, cum eorum dimidii pares ſint, binarius eos per illos dimidios pares metitur. Ergo per definitionem XVIII.

Quod etiam pariter impares ſint, ſic oſtendo. Sumatur quilibet ex illis B, quem ſi dividas bifariam, & dimidium rurſus bifariam, ac ſic deinceps, tandem incides in aliquem imparem, ſi enim incideremus ſemper in pares, incideremus tandem in 2, ac proinde B eſſet ab unitate duplus: contra hypotheſim. Impar autem ille metietur parem B per *a* parem. Ergo B pariter impar eſt. *a* coroll. 1. 29. 9.

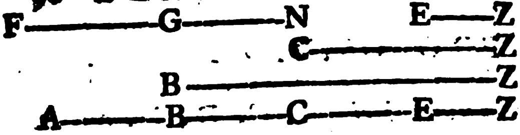
Atque ex his patet III. pars præcedentis.

Quod præter hos alii nulli ſint pariter pares, & pariter impares, patet ex duabus præcedentibus propoſitionibus.

PROPOSITIO XXXV.

SI fuerint quantitates continuè proportionales quotcumque EZ, CZ, BZ, AZ; erit ut CE exceſſus ſecundæ CZ ſupra primam, ſive minimam EZ ad minimam EZ; ita exceſſus AE maximæ AZ ſupra minimam, ad omnes ſimul reliquas BZ, CZ, EZ.

G F—G



Transferantur EZ, CZ, BZ in maximam AZ. Quoniam AZ eſt ad BZ, ut BZ ad CZ, & CZ ad EZ, erit *a* dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & CE ad EZ. Quare, *b* ut una AB ad unam BZ, ſive, ut CE ad EZ, ita ſimul omnes AB, BC, CE, hoc eſt AE, ad omnes ſimul BZ, CZ, EZ. *Q. D. E.*

a 17. 5.
b 12. 5.

Ex hac propoſitione, cujus fœcunditatem non videntur priores Arithmetici obſervaſſe, ſequentia deducemus

Corollaria.

I. Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales EZ, CZ, BZ, AZ; erit, ut denominator proportionis, unitate mulctatus ad unitatem, ita minimi, & maximi termini differentia AE ad ſummam omnium, dempto maximo AZ.

Denominatorem referat FN, unitatem verò GN, Igitur, ut FN eſt ad GN, ita CZ eſt ad EZ: & dividendo, ut FG (denominator ſcilicet unitate mulctatus) eſt ad CN unitatem; ita CE eſt ad EZ, hoc eſt, per hanc propoſitionem, ita eſt AE ad omnes ſimul BZ, CZ, EZ.

II. Iiſdem poſitis, dato denominatore FN, & maximi, ac minimi termini differentiâ AE, habetur ſumma omnium, dempto maximo, ſi AE maximi, & minimi differentia dividatur per

per denominatorem unitate mulctatum FG.

Cum enim ſit *c*, ut FG ad GN unitatem, ita AE ad omnium ſummam, dempto AZ, ea exhibebitur, ſi quartus proportionalis inveniatur; is verò obtinetur, ſi *d* terminus ſecundus, nempe unitas, ducatur in AE tertium, & productus, qui manet ipſe AE, dividatur per primum FG. *c* coroll. 1. præc. *d* 19. 9.

III. Quod ſi termini proportionalis fuerint magnitudinis, habebitur ſumma omnium, demptâ maximâ, ſi fiat, ut CE duarum collateralium differentia ad minorem EZ, ita AE maximæ, & minimæ differentia ad aliam. Patet ex ipſa propoſitione.

IV. Si data ſeries proportionalium, ſeù numerorum, ſeù magnitudinum ſit proportionis duplæ, habetur omnium ſumma, demptâ maximâ, ſi minima auferatur à maximâ.

Per hanc enim XXXV, ut CE eſt ad EZ; ita AE eſt ad omnes BZ, CZ, EZ. Atqui hìc CE par eſt EZ. Ergo etiam AE par eſt omnibus BZ, CZ, EZ.

V. Iiſdem poſitis, ut AB, differentia duorum maximorum terminorum AZ, BZ, eſt ad maximum; ita AE maximus, dempto minimo, eſt ad omnium ſummam, dempto minimo.

Oſtenſum eſt enim in propoſitione, ut AB eſt ad BZ, ita AE eſſe ad omnes BZ, CZ, EZ. Ergo, ut AB eſt ad AZ, ita AE eſt ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, hoc eſt ad omnes, demptâ minimâ EZ.

Scholium.

QUi hanc propoſitionem, ejuſque corollaria contulerit cum iis, quæ ſcripſi ad propoſitionem XI. l. VI. facilè intelliget, hinc deduci poſſe totam contemplationem illam, qua ſeriei infinitarum proportionalium quantitatum una exhibetur omnibus æqualis. Nam cum finitus eſt proportionalium numerus, tum, ut f CE eſt ad EZ, ſeù, ut AB ad BZ, ita AE, hoc eſt maxima, demptá minimâ ſeù ultima, eſt ad omnes BZ, CZ, EZ. Cum verò numerus proportionalium infinitus eſt, tunc, ut AB eſt ad BZ, ita maxima tota AZ eſt ad omnes BZ, CZ, EZ, &c. Ubi hoc ſolum intereſt, quod tertio loco maxima jam accipiatur tota, quia nimirum minima, quæ prius à maximâ auferebatur, jam nulla ſit; ac proinde auferri nequeat.

f per hanc 35.

Rurſus, cum finitus eſt numerus proportionalium, ut AB g eſt ad AZ maximam, ita AE, hoc eſt maxima, demptâ minimâ, eſt ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, hoc eſt ad omnes, demptâ minimâ. At verò cum infinitus eſt proportionalium numerus, tum, ut AB eſt ad maximam AZ, ita maxima AZ eſt ad omnes AZ, BZ, CZ, EZ. Ubi rurſum hæc una differentia eſt, quod minima jam evaneſcat, ac nulla ſit, adeoque auferri nequeat.

g cor. 9. præc.

PROPOSITIO XXXVI.

SI numerorum ſeries in ratione duplâ ab unitate continuè proportionalium A, B, C, D continuetur, donec eorum ſumma E ſit primus numerus; ſumma E in maximum D multiplicata faciet numerum perfectum. Quod

1	A	B	C	D
E	O	N	P	F
		M	Q	

Quot ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E dupli, nimirum E, O, N, P. Ex æquo *a* igitur eſt, ut A ad D, ſic B ad P. Quare ex A in *a* 22. 5.
P idem *b* fiet numerus, qui ex D in E, nempe *b* 19. 7.
F. Ergo P metitur F per A binarium, ac proinde E, O, N, P, F ſunt continuè proportionales in ratione duplâ. Ergo F minus E, æquatur *c* ipſis E, O, N, P. Sed E æqualis eſt *d* *c* coroll.
ipſis 1, A, B, C, D. Ergo F minus E ipſis 1, 4. præc.
A, B, C, D, & O, N, P æqualis eſt. Adde *d* hyp.
utriſque E, erit F omnibus 1, A, B, C, D, E, O, N, P æqualis. Sunt autem dicti numeri partes aliquotæ ipſius F; nam, cum E, O, N, P, F ſint continuè proportionales, ſinguli metiuntur *e* F. Ob eamdem cauſam ſinguli 1, A, B, *e* 11. 9.
C metiuntur D, D autem metitur F, nam D *f*
in E fecit F. Ergo & ſinguli 1, A, B, C, D *g* *f* hyp.
metiuntur F. *g* ax. 11.

Reliquum eſt, ut oſtendatur, numeri F nullam eſſe aliam partem aliquotam. Eſto M quævis aliquota ipſius F. Oſtendam, eam eſſe eamdem cum aliquâ ipſarum A, B, C, D, E, O, N, P eo ipſo, quo id negatur. Ponatur enim, M non eſſe eamdem cum ullâ ipſarum A, B, &c. Quoniam igitur M metitur F, metiatur per Q. Ergo M in Q *h* facit F. Sed etiam E in *h* ax. 8.
D fecit F. Ergo eſt, ut E ad Q, ſic M ad D. Sed quia B unitati proximus eſt primus, *i* ut- *i* hyp.

1	A	B	C	D
E	O	N	P	F
		M	Q	

pote 2, & M ponitur eſſe diverſus ab omnibus A, B, C, non metitur *k* *k* 13. 9.
M ipſum D. Ergo neque E metietur Q. Quare, *l* cum B primus ſit, erunt *l* hyp.

 E, Q

m 31. 7. E. Q *m* primi inter ſe, ideoque in *n* ratione
n 23. 7. ſuâ minimi. Ergo E metitur M, & Q *o* meti-
o 21. 7. tur D. Ergo, cum A primus ſit, Q eſt aliquis
p 13. 9. *p* ipſorum A, B, C. Sit ergo Q idem cum B, & quot ſunt B, C, D, tot ſumantur ab E dupli E, O, N. Igitur ex æquo, ut B eſt ad D, ſic E eſt ad N. Idem ergo fit ex B in N, qui fit ex D in E, nempe F. Sed, quia M metitur F per Q, etiam Q in M facit F: quare, cum idem F fiat ex Q in M, & ex B in N, erit, ut Q ad B, ita N ad M. Sed oſtendi Q eſſe idem cum B. Ergo N eſt idem cum M.

Nullas igitur F partes aliquotas habet, præter 1, A, B, C, D, E, O, N, P, quibus omnibus cum F ſit æqualis, perfectus eſt. *Q. E. D.*

Quemadmodum in XII. propoſitione hujus libri, ita & in hac ex contradictoriâ ſuâ directe aſſertio concluditur. Quod miror à Clavio, aliiſque non fuiſſe obſervatum.

Scholium.

Ex hoc Theoremate invenientur omnes numeri perfecti. Quia ſumma ex 1, 2, eſt 3. numerus primus, 3 in ultimum 2 facit 6 primum perfectum, cujus partes aliquotæ ſunt 1, 2, 3. Et quia ſumma ex 1, 2, 4 eſt 7 primus numerus, 7 in maximum 4 facit 28 ſecundum perfectum, cujus partes aliquotæ ſunt 1, 2, 4, 7, 14. Rurſum, quia ſumma ex 1, 2, 4, 8, 16, eſt 31 primus, 31 in 16 facit 496 perfectum tertium, cujus aliquotæ partes ſunt 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Summa habetur facillimè, ſi numerus ſequens mulctetur unitate, ut patet ex corollario

IV.

IV. præcedente. Partes aliquotas cujuſvis perfecti ſic invenies: Quot numeri accepti ſunt ab unitate dupli, ſecluſa unitate, totidem a primo, ſive ſummâ accipiantur dupli annumerato primo. Hi dupli cum duplis ab unitate, atque ipsâ unitate, ſunt partes aliquotæ perfecti dati.

Porro inventio perfectorum ex hâc propoſitione, & corollario IV. præcedente breviſſime exponitur hunc in modum. Ratio dupla ab unitate continuetur in infinitum. Vide qui numeri progreſſionis, abjectâ unitate, fiant primi: hi namque ducti in præcedentes dabunt perfectos.

De multitudine perfectorum hactenus inventorum Marinus Merſennus in Præf. num. IX. hæc ſcribit, hactenus inventos eſſe tantum 11: nimirum, 6. 28. 496. 8128. 23 (550, 336. 8, 589 (869, 056. 137, 438 (691, 328. 2 (385, 843 (008, 139 (952, 128, & tres alios, quorum poſtremus ſit ex progreſſionis duplæ termino 257mo unitate mulctato in terminum 256um: ex illis 28, quos Petrus Bungus cap. XXVIII. de myſteriis num. recenſet, tantùm 8 primos eſſe perfectos, eos videlicet, quos ſupra dedimus, reliquos 20 imperfectos. Hæc ille. Tomo I. Phyſico-Mathem.

Quod autem plures hactenus non ſint reperti, inde fit, quod in ſerie progreſſionis duplæ intervalla numerorum, qui abjectâ unitate primi fiant, valde magna ſint, undecimus enim ejuſmodi eſt terminus ab unitate, ut diximus ſuprà, 257us excluſivè, ac proinde numerus ingens, qui primus an ſit, longiſſimi laboris eſt diſcernere. Sane, ſi 20 notis conſtet numerus, Merſennus aſſerit, huic examini ne integrum quidem ſæculum ſufficere, quocunque modo hactenus cognito utaris.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER PRIMUS.

QUid petiſſimum hoc in opere ſpectaverim, initio præfatus ſum: nimirum, ut Arithmeticæ Praxim univerſam, & clarè, breviterque exponerem, & (quod nullus huc uſque fecit) demonſtrarem. Quia porro, quod in tribus Elementorum libris compendio, ut opinor, non ſpernendo jam feci, Logiſticæ Specioſæ rudimentis primis non ſemel utar etiam hìc, revocanda in memoriam erunt ea, quæ habentur ante Elementorum librum, nobis primum, Euclidi ſeptimum, quibus hoc jam accedet unum, quod fractiones etiam ſpecioſas ſubinde adhibebimus. Nihil eſt tamen, quod difficultatem hìc aliquam ſibi quiſpiam imaginetur, cum operationes earum à communium fractionum operationibus in nullo differant.

In citandis elementorum Arithmeticorum libris Euclidis ordinem retinui. Quare cum hìc, nobis primus, citatur ſeptimus, adeundus eſt primus noſter, & ſic de duobus reliquis. Primus numerus propoſitionem, ſecundus librum deſignat.

LOGIS-

LOGISTICA
Integrorum Numerorum.

IN omni numero, pluribus notis conſtante, ea nota, quæ maximè dextra eſt, prima dicetur, ultima verò, quæ maximè ſiniſtra.

CAPUT I.
Notarum Arithmeticarum Inſtitutio.

DEcem notæ, ſeu characteres ſunt, (alii digitos, alii figuras appellant,) quibus omnes numeri exprimuntur.

0. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Prima nota 1. unitatem ſignificat, 2. ſignificat unitates duas, 3. unitates tres, 4. unitates quatuor, & ſic deinceps.

Poſtrema 0, quæ cifra dicitur, nihil ſignificat, ſed aliis notis præpoſita, earum auget valorem, ut mox dicemus.

Præter hunc valorem ſimplicem notæ jam dictum, alium inſuper habent ratione loci, quem ſingulæ occupant. Porro locorum valor creſcit ſecundum proportionem decuplam, in infinitum continuatam. Itaque nota quælibet, primo loco poſita, ſignificat, ut dictum eſt, unitates, poſita ſecundo loco, ſignificat tot decades, quot habet unitates, tertio loco, tot centenas, quarto loco, tot millia, quinto loco, tc

der

dena millia, ſexto, tot centena millia, ſeptimo, tot mille millia, ſeu decies centena millia, ſeu milliones, quot unitates habet; atque ita deinceps ſequentium locorum valor in proportione decuplâ in infinitum procedit.

Eſto numerus A: prima hujus nota 6 ſignificat ſex unitates, ſecunda 9, valet novem decades unitatum, hoc eſt, 90, nonaginta, tertia 7 valet ſeptem centenas, hoc eſt, 700, ſeptingenta, quarta 5 valet quinque millia, 5000, quinta 3 valet tres decades millium, ſeu ter dena millia, hoc eſt, 30000, triginta millia, ſexta 8 valet octo centenas millium, hoc eſt, 800000, octingenta millia, ſeptima 1 valet unum millionem, ſeu mille millia, ſeu decies centena millia 1000000, octava 4 valet quadraginta milliones 40000000.

A. 4 1 8 3 5 7 9 6.

9 0. Nonaginta.
7 0 0. Septingenta.
5 0 0 0. Quinque millia.
3 0 0 0 0. Triginta millia.
8 0 0 0 0 0. Octingenta millia.

1 0 0 0 0 0 0. Mille mill., ſeu millio.
4 0 0 0 0 0 0 0. Quadraginta million.

1 Unitas.
10 Decem.
100 Centum.
1000 Mille.
10000 Decem millia.
100000 Centum millia.

LO-

LOCUS.	VALOR.
Primus	Unitates
Secundus	Decades
Tertius	Centenæ
Quartus	Millia
Quintus	Decades millium
Sextus	Centenæ millium
Septimus	Milliones
Octavus	Decades millionum
Nonus	Centenæ millionum
Decimus	Millia millionum
Undecimus	Decades millium millionum
Duodecimus	Centenæ millium millionum
13us	Milliones millionum, ſive biliones
14us	Decades bilionum
15us	Centenæ bilionum
16us	Millia bilionum
17us	Decades millium bilionum.
18us	Centenæ millium bilionum
19us	Milliones bilionum, ſive triliones
20us	Decades trilionum
21us	Centenæ trilionum
22us	Millia trilionum
23us	Decades millium trilionum
24us	Centenæ millium trilionum
25us	Milliones trilionum, ſive quatriliones
Etc.	Etc.

Por-

Porro ſingulorum locorum valor tabellâ hìc appoſitâ exhibetur, quam viſum eſt commodiſſimum ita partiri, ut ſingula quaſi membra locorum ſenarii ſinguli conſtituerent. In ſecundo igitur ſenario, ſeu membro ſunt milliones, in tertio biliones, in quarto triliones, in quinto quatriliones, atque ita in infinitum. *Valor enim cujuſvis membri, ſeu ſenarii, a numero membrorum, ſeu ſenariorum præcedentium denominabitur*. Ut ſi quæris valorem ſenarii ſeptimi, is erit ſextilio, quia ſeptimum ſenarium ſex ſenarii præcedunt.

Si magis placet valorem membrorum per ſolos milliones exprimere, toties itera vocem *millio*, quot ſunt membra præcedentia. Ut ſi quæratur, quis ſit valor in quarto ſenario, oportet tertio dicere millio, quia quartum ſenarium tres ſenarii, ſeu membra antecedunt. Itaque valor quarti ſenarii eſt millio millionis millionis.

CAPUT II.

Numeratio.

DOcet Numeratio datum numerum ſcribere, & enuntiare. Utrumque facili negotio perficiet is, qui notarum numeratum valorem, tum ſimplicem, cùm loci potiſſimum, primo Capite explicatum, rectè perceperit. Sed,qnia in magnis numeris proclive eſt, ut hæreant etiam Periti, variæ praxes huic rei facilitandæ ſunt excogitatæ. Nos hìc eam dabimus, quæ viſa eſt inter cæteras expeditior.

Ante

Ante omnia dabit operam Tyro Arithmeticus, ut expeditè ſcribat, ac enuntiet primi ſenarii locos, hoc eſt numeros conſtantes notis, vel ſex, vel quinque, vel quatuor, &c.

In quo juvabitur hac praxi. Pronuntiandi dentur numeri A, B, C. Poſt tres primas notas comma interpone, ut duo quaſi membra exiſtant, ſive ſecundum tribus conſtet notis, ſive paucioribus. Pronuntia deinde ſecundum membrum, tanquam ſi eſſet ſolum, ſed adde ſemel hanc vocem *mille*, vel *millia*; primum verò membrum pronuntia, ut jacet. Datos igitur numeros A, B, C ita enunciabis,

370, 517. A
49, 304. B
7, 059. C

A. Trecenta ſeptuaginta millia, quingenta decem, & ſeptem.
B. Quadraginta novem millia, trecenta, & quatuor.
C. Septem millia, quinquaginta novem.

Hoc præmiſſo, numerus enuntiandus eſto quantumvis magnus.

D.

96, 638 (908, 003 (030, 460 (243, 709.

Poſt ſex quaſque notas, a dextris incipiendo, lunulâ, aut virgulâ interpoſitâ, numerum partire in quædam quaſi membra, quorum ſingula ſenis conſtabunt notis, dempto ultimo, quod conſtare poteſt paucioribus, imo unicâ. Tum ſingula membra, à ſiniſtris incipien-

piendo, pronuncia, ut jam docui, ac ſi eſſent ſola, ſed adjunge ſingulis valorem ipſis competentem, quem ſubjecta tabella indicat.

MEMB.	*VALOR*	*MEMB.*	*VALOR*
Primum		Septimum	Sextilio
Secundum	Millio	Octavum	Septilio
Tertium	Bilio	Nonum	Octilio
Quartum	Trilio	Etc.	Etc.
Quintum	Quatrilio		
Sextum	Quintilio		

Numerus igitur D ſic pronuntiabitur.

Membr. IV.

Nonaginta ſex millia, ſexcenti triginta octo trilliones.

Membr. III.

Nongenta octo millia, & tres biliones.

Membr. II.

Triginta millia, quadringenti ſexaginta milliones,

Membr. I.

Ducenta quadraginta tria millia, ſeptingenta novem.

Cum numerus multas ad dextram, & non interruptas habet cifras, brevior eſt pronuntiatio. Ut ſi detur Numerus E.

E.

E.

1 (000000(000000(000000(000000
(000000(000000.

(major is eſt numero arenarum, orbem Terræ componentium.) Quoniam is ultimum, hoc eſt ſeptimum membrum conſtans unitate, ſolum habet ſignificativum, eum totum pronuntiaveris, dicendo, *unus ſextilio*.

Quod ſi miſſis bilionum, ac trilionum vocibus, malis per ſolos milliones enuntiare; eâdem partitione factâ, quæ ſupra, pronuntia membra ſingula, ac ſi eſſent ſola, toties adjunctâ voce *millio*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Itaque numerus D per milliones ſic pronuntiabitur.

Membr. IV.

96, 638 Milliones millionum millionum

Membr. III.

908, 003 Milliones millionum.

Membr. II.

030, 460. Milliones.

Membr. I.

243, 709.

Nu-

Numerus vero E pronuntiabitur hunc in modum : unus millio millionum millionum millionum millionum millionum . Prior modus brevior , & expeditior eſt , alter uſitatior .

Omnium facillima , at cæteris longior eſt enuntiatio per ſola millia . Poſt ſingulas ternas notas , initio facto a dextris, interpone commata: tum membra ſingula , incipiendo a ſiniſtris , ita pronuntia , ac ſi eſſent ſola , ſed toties adjunge hanc vocem *mille*, vel *millies*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt . Datus ſit numerus F enuntiandus per millia . Membrum ultimum eſt 96*ies* millies millies millena millia : penultimum , 630*ies* millies millena millia .

F 96 , 630 , 000 , 000 , 000 .

Ratio horum omnium ex Capite primo eſt manifeſta .

Scriptio dati numeri nullo negotio perficitur , ſubſidio tabellæ Capitis præcedentis . Scribendus eſto hic numerus , *quadraginta quinque milliones , ſeptem millia* .

In tabellâ reperies , decades millionum obtinere locum octavum , milliones ſeptimum , millia quartum . Scribe igitur 4 loco octavo , 5 ſeptimo , 7 quarto , & loca vacua cifris reple ,

45 (007 , 009.

CA-

CAPUT III.

Poriſmata quædam, ex quibus pendent rationes operationum logiſticarum.

PORISMA I.

SI numero A pluribus notis conſtanti præponatur una nota, illius valor augetur in decuplum; ſi duæ in centuplum; ſi tres in millecuplum, & ſic deinceps, ſemper in proportione decuplá.

		243	0
A :	243	243	00
		243	000

Demonſtratio. Cum enim toti numero A præponitur una nota, (cifræ quaslibet hìc notas repræſentant) ſingulæ ejus notæ ad unum locum promoventur, ſic, ut 3 jam ſecundo conſiſtat loco, 4 tertio, 2 quarto, ac proinde ſingularum valor augetur in decuplum, ut patet ex primâ notarum Arithmeticarum inſtitutione, capite primo expoſitâ. Ergo valor totius numeri A augetur in decuplum. Similiter cum numero A duæ notæ præponuntur, aſcendunt ſingulæ ad duo loca. Ergo valor ſingularum, ac proinde etiam numeri totius A, augetur in centuplum. Et ſic deinceps.

Corollarium. Hinc patet, ſi ante duos numeros *a*, & *b* ponantur æquè multæ cifræ, ut fiant *c*, & *d*, fore *c*, & *d* ipſorum *a*, & *b* æquè

a	32.	3200.	*c*
b	7.	700.	*d*

b æquè multiplices. Si enim præponatur ſingulis una cyfra, erunt pariter *c*, & *d* ipſorum *a*, & *b* decupli, ſi duæ cyfræ, ambo centupli, & ſic deinceps.

PORISMA II.

1600 A
999 B

D*Uorum numerorum ille major eſt, qui pluribus notis conſtat.*

Patet ex primâ inſtitutione notarum. Sic A major eſt, quàm B.

PORISMA III.

C. 2000
D. 1999.

N*Umerorum, æquè multis notis conſtantium ille major eſt, cujus poſtrema nota major eſt.*

Sic C major eſt, quàm D. Patet ex inſtitutione primâ notarum numeralium.

PORISMA IV.

A 2999
B 2000
E 2000 | 0

S*I duo inæquales numeri A, B æquè multis notis conſtent, continebitur minor in majore minus, quàm decies.*

Demonſtratio.

AAdjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per Poriſma II. E major eſt, quàm A. Sed

A. Sed E præciſè decuplus eſt dati minoris B, per Poriſma I. Ergo A non eſt decuplus dati B. *Q. E. D.*

PORISMA V.

A 2999
B 300
E 300 | 0

D*Ati ſint numeri, A major, B minor, & major A ſuperet minorem B unâ notâ; ſed minoris B nota ultima, 3, ſit major notâ ultimâ majoris A. Dico minorem B in majori A contineri minus, quàm decies.*

Demonſtratio. Adjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per Poriſma III. E major erit, quàm A. Sed E præciſè decuplus eſt dati minoris B, per Poriſma I. Ergo A minor eſt, quàm decuplus ipſius B. *Q. E. D.*

PORISMA VI.

D*Ati ſint duo numeri A, & B. Si prima unius nota, c, multiplicet aliquam numeri alterius notam* d, *prima altiorem, ſed acceptum ſimpliciter, & productum* e *ad locum notæ* d *attollatur, tot videlicet notis ante ipſum poſitis, quot ſunt ante* d, *ut fiat* f. *Dico* f *eſſe verum productum, quod ſit ex nota* c, *multiplicante notam* d, *ſecundum loci valorem æſtimatam.*

	d	
	3, 042.	A
	c	
	517	B
e.	21	
f.	21. 000	

Demonſtratio. Nota *d* ſecun- *d* 3 3,000, g dum

dum loci valorem æſtimata, eſto g. Tum c multiplicans g faciat z. Oſtendendum eſt f eſſe z. Quoniam c multiplicans numeros d, & g genuit numeros e, & z; per XVII. lib. VII, ut d eſt ad g, ita e eſt ad z. Atqui etiam, ut d ad g, ita e eſt ad f. Cum enim g, & f ſint ipſi numeri d, & e, ſed æqualiter ſublimati, hoc eſt æquè multas ante ſe notas per hypotheſim habentes; patet ex Poriſmatis I. corollario g, & f ipſarum a, & e eſſe æquè multiplices. Ergo e ad z, & ad f eamdem habet proportionem. Ergo per IX. lib. V. z, & f ſunt æquales. Q. E. D.

c 7
e 21. z——
f 21, 000

PORISMA VII.

Dati rurſum ſint duo numeri A, & B. Si duæ quælibet utriuſque numeri notæ k, & d invicem multiplicentur ſimpliciter acceptæ, & productum c attollatur ad locum, ex notarum multiplicantium locis compoſitum, tot videlicet notis ante c poſitis, quot utramque k, & d antecedunt; dico haberi in f productum verum, quod fit ex notis k, & d juxta loci valorem æſtimatis.

d
3, 402. A
k
5, 15. B
———
c. 15, m, 15, 000
f, 15, 000, 00

k, 5 5, 00. h
g. 3, 000
c c
m. 15, 000. 15, 000, 00, f
z———

De-

Demonſtratio. Notæ k, & d ſecundum loci valorem æſtimatæ ſint b, & g. Tum b in g ſit z. Oſtendendum eſt f eſſe z. Ante c productum ex k in d ponantur tot notæ, quot antecedunt notam d, & fiat m. Erit per Poriſma præcedens m productum ex k in notam d, ex loco æſtimatam, hoc eſt ex k in g. Deinde quoniam per conſtructionem m eſt c cum tot notis ante ſe, quot ſunt in numero A ante d; f vero per hypotheſim eſt idem c, ſed cum tot notis ante ſe, quot in numeris A, & B antecedunt utramque d, & k; manifeſtum eſt notas, quæ in f ponuntur ante c, excedere eas, quæ in m ſunt ante c, tot notis, quot ſunt in B ante k; hoc eſt tot notis, quot ſunt in b ante k, cum b ſit ipſum k, ex loco æſtimatum. Ergo per corollarium Poriſmatis I. b, & f ſunt ipſorum k, & m æquè multiplices, ac proinde, ut k eſt ad b, ſic m eſt ad f. Atqui etiam per XVIII. l. VII., ut k eſt ad b, ita m eſt ad z; nam, ut oſtendi ſupra, k multiplicans g produxit m, & per hypotheſim b multiplicans g genuit z. Ergo m eodem modo ſe habet ad f, & ad z. Ergo per IX. lib. V. f, & z æquales ſunt. *Q. E. D.*

Ex hoc poriſmate, & præcedenti multiplicatio demonſtrabitur Capite VII.

PORISMA VIII.

360,	5897	{ 60.	C
A,	B	6.	d
		6, 0000	f

Dati ſint duo numeri AB, & C: ſi C dividat membrum A ſimpliciter acceptum, & quotiens d *attollatur*

ad locum membri A, hoc eſt ponantur ante d *tot notæ, quot ſunt ante membrum A, ut fiat* f. *Dico* f *eſſe quotientem verum, qui habetur ex membro A, æſtimato ſecundum loci valorem, diviſo per C.*

Demonſtratio. Membrum A, juxta loci valorem æſtimatum, eſto *g*. Tum C, dividens *g*, faciat quotientem *z*. Oſtendendum eſt *f* eſſe *z*. Quoniam C, dividens numeros A, & *g*, genuit quotientes *d*, & *z*; erit per coroll. p. XVIII. lib. VII. ut A ad *g*, ita *d* ad *z*. Atqui etiam eſt, ut A ad *g*, ita *d* ad *f*. Cum enim *g*, & *f* ſint ipſi numeri A, & *d* ad æqualem locum ſublimati, hoc eſt, æquè multas per hypotheſim notas ante ſe habentes; patet ex corollario poriſmatis I. *g*, & *f* ipſorum A, & *d* eſſe æquè multiplices. Ergo *d* eodem modo ſe habet ad *f*, & ad *z*. Ergo per IX. lib. V. *f* eſt *z*. *Q. E. D.*

A	g
360	360, 0000
C	
60	
d. 6.	6, 0000. f
	z

Ex hoc poriſmate diviſio demonſtrabitur Capite IX.

PORISMA IX.

Operationum Logiſticarum, hoc eſt additionis, ſubtractionis, multiplicationis, & diviſionis artificium in eo poſitum eſt, quod tantiſper, dum operamur, loci valore neglecto, notæ accipiantur juxta valorem ſimplicem; ſic tamen, ut ſummæ in additione, reſidua in ſubtractione, producta in multiplicatione, quotien-

tientes in diviſione ſuis quæque reponantur locis: quo fit, ut valor ſingulis ex loco debitus reſtituatur.

PORISMA X.

Nota ſimplex, quemcumque numerum multiplicans, aut dividens, non niſi unicâ notâ, ſeu loco eum auget, minuitve.

A	365
	10
	3650

Detur numerus A quicumque. Hic multiplicatus per 10, non niſi uno gradu, ſeu loco attollitur, ut patet ex I. poriſmate. Ergo neque multiplicatus per notam ſimplicem attolletur altiùs gradu uno.

A	365	{ 36	$\frac{5}{10}$
	10		

Rurſum 10, dividens datum A, eum non deprimit infra gradum unum. Ergo neque nota ſimplex: quò enim diviſor eſt minor, eò quotiens major eſt.

CAPUT IV.

Additio.

Additio eſt plurium numerorum in unam ſummam collectio.

PRAXIS.

Dati ſint numeri A, B, C in unam ſummam colligendi.

Ita ſcribantur, ut primæ notæ reſpondeant primis, hoc

97063.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D

eſt unitates unitatibus, ſecundæ ſecundis, hoc eſt decades decadibus; tertiæ tertiis, hoc eſt centenæ centenis; & ſic deinceps.

Subductâ deinde lineâ, notæ primi loci addantur, & ſi numerus ex his compoſitus unicâ notâ conſtet, ea primo loco infra lineam ſcribatur. Si vero duabus conſtet, ſola earum prima infra lineam ſcribetur, altera reſervabitur, ſequenti loco reponenda. Si tribus, quod rariùs accidit, ſecunda ad ſecundum, tertia ad tertium locum pertinebit.

Poſt hæc addantur notæ ſecundi loci, unà cum illâ, quæ fuerat reſervata, numeruſque ex his compoſitus ſcribatur infra lineam ſecundo loco, juxta cautionem jam traditam. Atque eumdem planè in modum locorum cæterorum additio peragetur.

Exemplo præcepta fient clariora.

Exemplum.

	97063. A
	8002. B
	5041. C
	110106. D

PRimi loci notæ 1, 2, 3 faciunt 6, quæ ſcribo infra lineam.

Notæ ſecundi loci 4, 0, 6 faciunt 10, qui numerus, quia duabus notis conſtat, primam 0 infra lineam ſcribo, ſecundam 1 ſervo tertio loco reponendam.

Loco tertio nullam reperio notam ſignificativam. Notam igitur ſervatam 1 infra lineam ſcribo in loco tertio.

In quarto loco reperio 5, 8, 7, quæ ſimul efficiunt 20, qui numerus, quia binis conſtat

notis,

notis, primam 0 ſcribo infra lineam quarto loco; ſecundam verò 2 ſervo ſequenti loco.

In loco quinto reperio 9, cui addo notam ſervatam 2, & fiunt 11, quæ, ut jacent, quinto, & ſexto loco ſubſcribo. Atque ita operatione totâ peractâ provenit numerus D, ſumma datorum A B, C.

* *Additio poteſt etiam fieri a ſiniſtrâ in dextram; & hæc operatio, ſive a ſiniſtrâ, ſive a dextrâ incipiat, iiſdem principiis* a *demonſtratur, primaque operatio eſt proba ſecundæ, ſicut ſecunda primæ. Quod forſan pluribus novum apparebit.*

Si multi fuerit numerorum addendorum ordines, expediet lineis interpoſitis in tres, quatuorve eos claſſes dividere, & ex ſingulis claſſibus ſingulas ſummas colligere, quæ deinde ad unum redactæ, ſummam ſummarum exhibeant.

97063. A
8002. B
5041. C
____
110106. D
____
9
20
0
10
6
____
110100. D

**Deſaiguliers Prof. Mathem. Aſtelod. Tract. de Scientiâ numerorum.*

a ax. 2. 3. 4.

Demonſtratio.

COlligitur ex Poriſmate IX. cap. III. Quamvis enim in operatione notarum valor localis neglectus tantiſper fuerit, is tamen fuit reſtitutus, dum ſingulorum locorum ſummæ ſuis quæque locis fuere collocatæ, ut ex operatione ipſâ manifeſtum eſt.

SPE-

SPECIES DIVERSÆ.

Libr.	Flo.	Aſs.
8	7	5
5	3	6
2	8	9
3	2	8
21.	3.	8.

SI addendæ ſint ſpecies diverſæ, ut libræ, floreni, aſſes, ſimilia ſub ſimilibus ſcribe, & minimam ſpeciem, nempe aſſes, primo loco, tum ordine reliquas. Deinde a minimæ ſpeciei ſummâ, quæ hic eſt aſſium 28, abiice ſpeciem ſequentem, nempe florenum quoties potes, & reſiduum ſcribe infra lineam ſub aſſibus: quod vero abjectum fuit, hic nempe florenus 1, ſervetur addendum ſpeciei ſequenti, nempe florenis.

Proxima ſpecies in unum collecta facit florenos 20, quibus ſi addamus unum a priori ſpecie abjectum, fiunt floreni 21. Ab his abiici poſſunt tres libræ, quas addo ſpeciei ſequenti, libris videlicet, & reſiduos florenos 3. florenis ſubſcribo.

Tertiæ ſpeciei ſumma eſt librarum 18, quibus adde 3 ex priori ſpecie abjectas, & fiunt libræ 21, quas libris ſubſcribe. Ergo ſumma eſt lib. 21, flor. 3, aſs. 8.

Eâdem methodo addi poſſunt gradus, minuta prima, ſecunda, tertia, &c.

CAPUT V.

Subtractio

DOcet minorem numerum a majori ſubtrahere, & reſiduum exhibere. Duplex vero

vero eſt modus, quo minor numerus a majori ſubtrahitur.

PRAXIS MODI I.

MInor numerus ſcribatur ſub majore ſic, ut primæ notæ primis, ſecundæ ſecundis, & ſic deinceps reſpondeant.

Subductâ deinde lineâ, primam inferiorem notam aufer a primâ ſuperiore, & reſiduum ſcribe infra lineam primo loco; tum ſecundam aufer ex ſecundâ, & reſiduum ſubſcribe ſecundo loco; & ſic deinceps.

Quod ſi in ſuperiori numero reſtent aliquæ notæ, quibus nullæ reſpondeant numeri inferioris, etiam illæ infra lineam ſcribantur.

Si autem nota aliqua inferior ſit major ſuperiore, ad ſuperiorem mente adiicies decem. Tum verò proxima ad ſiniſtram nota ſignificativa ſuperioris numeri æſtimanda eſt minor unitate, quàm reverà ſit; & ſi intermediæ eſſent cifræ una, vel plures, omnes illæ ad notam ſignificativam uſque æſtimandæ erunt tamquam 9.

Exempla.

I. ESto B auferendus ab A.	496.	A
Aufer 5 ex 6, reſtat 1,	75.	B
quod ſcribe infra lineam. Tum	——	
7 aufer ex 9, reſtant 2, quæ	421.	C

ſubſcribe ſecundo loco. Supereſt in ſuperiori numero nota 4, cui nulla reſpondet in numero inferiore. Subſcribe igitur 4 loco tertio. Reſiduum quæſitum eſt C.

II.

3004.	D
2578.	E
426.	F

II. Detur E auferendus ex D. Quia 8 ex 4 auferri nequit; ad 4 mente adjicio decem, atque ita 8 aufero ex 14, reſtant 6, quæ ſubſcribo. Quia vero ad 4 adjeci decem mutuata a numero ſequente, proximam notam ſignificantem 3 reputabimus ut 2, & cifras intermedias, ut totidem 9. Aufero igitur 7 ex 9, & reſiduum 2 ſubſcribo. Tum 5 aufero ſimiliter ex 9, & reſiduum 4 ſubſcribo. Tandem 2 aufero non ex 3, ſed ex 2, & nihil reſtat. Reliquum igitur quæſitum eſt F.

85003	G
69	H
84934	I

III. Oporteat H auferre ex G. Quia 9 ex 3 auferri nequit, adjectis mente 10 ad 3, ſubduco 9 ex 13, & reſiduum ſubſcribo. Quapropter 5 fit 4, & 00 vertuntur in 9. Ergo 6 aufero ex 9, & reſiduum 3 ſubſcribo. Tum, quia nullæ notæ inferioris numeri H ſuperſunt auferendæ, reliquas ſuperioris, quæ jam ſunt, non 850, ſed 849, ſubſcribo. Erit I quæſitum reſiduum.

100000.	*K*
51243.	L
48757.	M

IV. Proponatur L auferendus ex *K*. Quia 3 nequit auferri ex 0, adjectis mente 10 ad 0, aufero 3 ex 10, & remanent 7. Tum verò, quia in majore numero *K* nota proxima ſignificativa eſt 1, ea evaneſcit, & cifræ intermediæ vertuntur in 9, a quibus ſubtrahes, ut ſupra; & erit M reſiduum quæſitum.

Demon-

Demonſtratio Modi I.

QUod in reſiduorum ſcriptione locorum valor ſervatus ſit, ex operatione ipſâ patet. Solùm reſtat, ut declaremus id, quod mirum videri ſolet Tyronibus, quare nota ſignificativa, ad ſiniſtram proxima, minuatur unitate; & cifræ, ſi quæ fuerint mediæ, in totidem 9. commutentur, quando nota inferior demi nequit ex ſuperiore. Inſpiciatur ſecundum exemplum. Quia 8 demi nequit ex 4, ad 4 adjicio decem mutuata a ſequente numero, qui eſt tria millia. Liquet autem, cum a tribus millibus ſubduco decem, remanere duo millia, nongenta, nonaginta, quæ quia Arithmeticè exprimuntur hiſce notis 2990, patet, quare in ſuperiori numero 3 vertatur in 2, & cifræ 00 in 99.

3004.	D
2578.	E
426.	F

D.	3004	96
E.	2578	91
F.	426	55

At dicet quiſpiam, ſi ante numeri D primam notam 4 ponerentur aliæ duæ 9, 6; & ante numeri E primam 8 duæ 9, 1; tunc 4 valeret 400., & 8 valeret 800; ac proinde ut 800 auferri poſſint ex 400, adjicienda eſſent non decem, ſed mille, ut ſic 800 ex 1400 ſubducantur. Verùm reſpondeo eòdem recidere, ſive 8 auferas ex 14, ſive 800 ex 1400, quia reſiduum 6 ſcribitur infra lineam eo loco, qui debetur notis 4, & 8, nempe tertio: unde fit, ut reſiduum 6 eo loco poſitum valeat 600,

quan-

quantum nempe ſupereſſet, ſi 800 ex 1400 ſubducerentur.

MODI II. PRAXIS.

HÆc in eo tantum a priore differt, quòd, quando nota inferior auferri nequit a ſuperiore, ac proinde illi decem adjiciuntur; nullâ in ſuperioribus notis ſequentibus mutatione factâ, ſequens inferior nota unitate augeatur; aut certè, ſi nulla nota ſignificativa ſequatur, in loco ſequenti unitas reponatur. Res exemplo declarabitur.

Exemplum.

8068.	K
576.	L
7492.	M

DEtur L, auferendus ex K. 6 ex 8 relinquit 2. 7. ex 6 ſubduci nequit. Adjicio ergo 10, & 7 demo ex 16, reſtant 9. Jam, quia adjeci 10, ſequens nota inferior 5 augenda eſt unitate, & ſic 5 fit 6. Rurſum 6 ex 0 auferri nequit. Aufero igitur 6 ex 10, & reſtant 4. Quia verò rurſum adjeci 10, repono ſequenti loco, qui vacat, unitatem, quæ ablata ex 8 relinquit 7. Reſiduum ergo quæſitum eſt M.

Hæc methodus expeditior plerumque eſt præcedenti; quæ tamen commodior erit, cum in majore numero plures occurrunt cifræ continuæ.

Demon-

Demonſtratio Modi II.

E——A——L——B
I——C——F

DEntur binæ quantitates AB major, CF minor, quæ ambæ æqualibus quantitatibus EA, IC augeantur. Si IF auferas ex EB, idem erit reſiduum LB, quod fuiſſet, CF ablato ex AB. Hoc ſi numeris applicetur, operationis ratio continuò eluceſcet. Nam ſuperiori notæ 6 adjicere decem ſic, ut fiat 16, nihil eſt aliud, quàm ſequenti poſt illam loco, qui hic tertius eſt, apponere unitatem. Quare cum etiam loco, notam inferiorem 7 ſequenti, qui & ipſe tertius hic eſt, apponatur unitas; manifeſtum eſt, utrumque numerum æqualiter augeri, ac proinde reſiduum, hâc ratione obtentum, illud ipſum eſſe, quod numero L a numero K ſubducto remanet.

Subtractio a ſiniſtrâ in dextram etiam fieri poteſt, & iiſdem principiis demonſtrari, ut patet hoc exemplo.

59.	
8068.	K
576.	L
7492.	M

Detur L, auferendus ex K, 5 ex 80 relinquit 75, ex quibus 7 infra repono, & 5 retineo, vel potius ſupra ſcribo. Poſtea 7 ex 56 auſero, & reſtant 49. 5 ſi ſupra ſcriptum ſit, deleo; 4 infra ſcribo, & 9 retineo, vel ſupra ſcribo. Denique 6 ex 98 relinquit 92, qui cum ultimus ſit numerus, infra totaliter reponitur, & reſiduum quæſitum M oſtendit, ſicut in exemplo præcedenti. Plura alia videri poſſunt apud a ſupradictum Auctorem.

a Deſaig.

SPE-

SPECIES DIVERSÆ.

UT libræ, floreni, aſſes ſubducantur, minor ſumma ſubſcribatur majori, ſic ut ſimilia ſimilibus reſpondeant: & ſi ſimile a ſimili ſubtrahi nequeat, a ſpecie majori proximâ unum mutuetur.

Lib.	Flor.	Aſſes.
25	12	13
10	14	18
14	3	15

Exemplum.

18 Aſſes, quia nequeunt auferri ex 13, a florenis 12 numero mutuò acceptum adjicio ad 13 aſſes, & fiunt 33. Jam 18 ex 33 ablati relinquunt 15. Rurſum quia 14 floreni ex 11 (unum quippe ſuſtulimus) demi nequeunt, ad florenos 11 addjicio 1 libram mutuatam a libris 25, & fiunt floreni 17, a quibus ſi ſubducantur 14, remanent 3. Poſtremò 10 libras ſubduco ex 24 (nam una mutuò data eſt), & reſtant 14 libræ.

Simili ratione ſubtrahentur gradus, minuta prima, ſecunda, &c.

CAPUT VI.

Tabula Pythagorica multiplicationi, diviſionique inſerviens.

ABacus, qui ab auctore Pythagoricus dicitur, in vertice ſeu ſupremo ordine AC habet novem primordiales notas Arithmeticas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: & ſub ſingulis

gulis ponitur ſingulorum duplum, triplum, quadruplum, &c. uſque ad noncuplum. Uſus eſt eximius, tradeturque cap. VII, & IX.

Quod ſi hujus Abaci columnæ AB, DE, &c. ab invicem ſeparentur, ut poſſint inter ſeſe quovis ordine permiſceri, multiplicationis, ac diviſionis compendium admirabile exhibebitur. Hanc tabulæ Pythagoricæ diſſectionem primus excogitavit, adhibuitque Johannes Neperus Baro Merchiſtonius, tum hoc invento ſuo, tum logarithmis a ſe itidem excogitatis, de Matheſi præclarè meritus.

Porro hujus Abaci diſſecti, ſive mobilis conſtructio eſt hujuſmodi. Præparentur ex ære, chartâ ſolida, aut aliâ quavis materiâ idoneâ laminæ plures oblongæ, & tenues AB, quæ dividantur in novem quadrata æqualia, & quadrata ſingula ductis diametris in duo triangula ſecentur ſic, ut inferius triangulum BNP ad dextram ſit. Primæ laminæ inſcribatur prima columna tabulæ Pitgagoricæ, nempe 1, 2, 3, 4, &c.; & in altera ejus facie columna ſecunda 2, 4, 6, 8, &c. In ſecundâ laminâ deſcribatur columna tertia tabulæ Pythagoricæ 3, 6, 9, 12, &c., in alterâ verò ejuſdem facie columna quarta 4, 8, 12, 16, &c. Et ſic deinceps in reliquis laminis Abaci Pythagorici reliquæ columnæ deſcribantur, eâ ſemper lege, ut, cum numerus unicâ notâ conſtat, is reponatur in triangulo inferiori; cum verò duabus, exempli gra. 18, prima nota 8 inſcribatur triangulo inferiori, ſecunda 1 triangulo ſuperiori. Ex ſingulis autem hujuſmodi laminis plures ejuſdem formæ erunt conſtruendæ. Sed uniuſcujuſque formæ ad maximas etiam

diviſiones, ac multiplicationes peragendas ſufficient. Præter has autem alia inſuper præparanda eſt lamina XZ, quam hìc expreſſam vides. Ea reliquis ad ſiniſtram in omni multiplicatione, ac diviſione apponitur, ſingulos numerorum ordines denominans, quam proinde ab officio exponentem nominabo.

Harum laminarum primum iſtud, atque præcipuum artificium eſt, ex quo uſus reliqui omnes emanant, quod datum numerum per novem primordiales notas momento penè multiplicatum exhibeat. Datus eſto numerus 597. Laminæ hunc numerum gerentes in vertice ſibi mutuò, apponantur, præfixâ ad lævam virgulâ exponente XZ. Stabit igitur in primo, ſive ſupremo ordine numerus datus 597, atque infra ipſum alii numerorum ordines octo multiplices primi 597, juxta numeros laminæ exponentis, ut cap. VIII. demonſtrabitur.

Modus legendi, & exſcribendi ordines numericos laminarum.

TRia obſerva. I. Primum inferius triangulum, quod nempe ad dextram eſt, conſtituere primum locum; rhombos intermedios ſingulos, loca ſingula intermedia; poſtremum ſuperius triangulum, locum ultimum. Ex quo ſtatim apparet, quot notis conſtet numerus, quem ordo quilibet laminarum continet. II. Notas in eodem rhombo exiſtentes, Exempl. gr. in NM, coaleſcere. Quod ſi coaleſcentes, hoc eſt in unum collectæ, numerum efficiant binis notis conſtantem, illius notam ſecundam ad ſequentem rhombum, aut triangulum rejici oportere.

Exem-

Exemplum.

OPorteat ordinem nonum deſcribere. In primo triangulo inferiori reperio 3, quam ſcribo primo loco. In ſequenti rhombo notæ ſunt 6, & 1, quæ coaleſcentes faciunt 7: ſcribo ergo 7 ſecundo loco. In rhombo ſequenti notæ ſunt 8, & 5, quæ coaleſcentes faciunt 13: hujus ſummæ primam notam 3 ſcribo loco tertio; alteram 1 rejicio ad ſequens ultimum triangulum, ac ad notam iſthic repertam 4 adjicio, & fiunt 5, quam ſcribo loco quarto. Ordo igitur nonus continet numerum 5373.

Ratio hujus exſcriptionis dabitur in demonſtratione cap. VIII.

CAPUT VII.

Multiplicatio.

QUid ſit multiplicatio, expoſitum eſt defin. XIII. lib. VII., qui nobis eſt Arithmeticorum primus.

Ut expeditè fiat multiplicatio numerorum pluribus notis conſtantium, prænoſcenda eſt notarum ſimplicium multiplicatio, quæ præſidio tabulæ Pythagoricæ momento abſolvitur. Oporteat multiplicare 7 per 8. In latere AB quære 7; in latere AC 8: in concurſu offertur 56 productum ex 7 per 8.

PRAXIS.

Dentur numeri A, B inter ſe multiplicandi. Si inæquali conſtant notarum numero, eum alteri ſubſcribe, qui paucioribus conſtat notis. Tum prima nota inferioris B multiplicet notas ſingulas ſuperioris A, & producta ſcribe infra lineam a dextrâ in ſiniſtram, eâ lege, ut ſi productum conſtet duabus notis, primam ſubſcribas, ſervatâ alterâ, quæ ſequenti producto addenda erit.

Pari modo reliquæ notæ inferioris B multiplicent ſingulas notas ſuperioris A; ſed producta ſic ſcribentur, ut producti ſecundi D prima nota eo loco reponatur, quem habet nota multiplicans 1, hoc eſt ſecundo; producti tertii E nota prima ſtatuatur eo loco, quem habet nota 5 multiplicans, hoc eſt tertio: & ſic deinceps.

Denique producta C, D, E collige in unam ſummam F. Hæc erit productum quæſitum ex multiplicatione numerorum A, B.

Exemplum.

3042	A
517	B
21294	C
3042-	D
15210--	E
1572714	F

Dentur multiplicandi inter ſe A, & B. Minoris B nota prima 7 multiplicet totum A. 7 in 2 facit 14: primam notam 4 ſcribo infra lineam; alteram, nempe 1, ſervo. 7 in 4 facit 28, quibus addo notam ſervatam 1, & fit 29: ſcribo 9 ſecundo loco in-

infra lineam, & ſervo 2. 7 in o facit o. Ergo notam ſervatam 2 ſubſcribo tertio loco ſolam. 7 in 3 facit 21; quæ ſubſcribo quarto, & quinto loco, ut jacent.

3042	A
517	B
21294	C
3042-	D
15210--	E
1572714	F

Eodem prorſus modo numeri B nota ſecunda 1, multiplicans totum A, gignet productum D, cujus prima nota 2 ſcribatur ſecundo loco, nimirum infra ipſam ſuam notam multiplicantem, quæ eſt 1. Neque aliter numeri B nota tertia 5 multiplicans totum A, gignet productum E, cujus prima nota o, ſcribatur loco tertio, nempe infra notam ſuam multiplicantem 5: cæteræ verò locis ordine ſuo conſequentibus reponantur.

Demonſtratio

MAnifeſta eſt ex Poriſm. VI. & VII. cap. III. Quod enim valorem ſibi ex loco debitum habeant notæ omnes producti primi C, itemque nota prima producti D, & nota prima producti E patet ex *Poriſm.* VI. Quod verò reliquæ notæ productorum D, & E valorem quoque habeant ex loco ſibi debitum, patet ex Poriſm. VII. Liquida ſanè res erit, ſi operandi ratio jam præſcripta cum Poriſmatis jam dictis conferatur.

Multiplicationis Compendia.

I. Cum utriuſque numeri dati G, H, vel unius tantùm, primæ notæ ſunt cifræ una, vel plures non interruptæ; multiplicatio peragetur inter notas ſignificantes ſolas, & producto præponentur omnes cifræ utriuſque numeri.

```
   12000  G
     400  H
 ---------
 4800000  K
 ---------
      23  G
    5000  H
 ---------
  115000  K
```

II. Cum datorum unus M conſtat unitate, & cifris, habetur productum P, ſi alteri N adjiciantur omnes cifræ prioris M.

```
    2340  N
    1000  M
 ---------
 2340000  P
```

III. Si in numero multiplicante R una, pluresve cifræ mediæ, & continuæ occurrant, illis omiſſis, per notam ſequentem 5 multiplicabis totum Q, & producti T notam primam 5 ſcribes infra notam ſuam multiplicantem, quæ etiam hìc eſt 5, nimirum quarto loco.

```
     8013  Q
     5006  R
 ----------
    48078  S
 40065     T
 ----------
 40113078
```

Horum compendiorum demonſtratio ex iiſdem VI., & VII. Poriſ. manifeſta ſimiliter eſt.

SPECIES DIVERSÆ.

UT Libræ, Floreni, Aſſes, prius ad minimam ſpeciem, puta aſſes, reducendæ; reductæ per regulas jam traditas multiplicentur; productum vero ad majorem, quæ placuerit, ſpeciem ope diviſionis, cap. IX. tradendæ, reducetur: ut ſi productum ſint 3400 aſſes, dividendo 3400 per 20, reduces ad florenos 170: hos dividendo per 6, reduxeris ad libras 28, cum unâ tertiâ, hoc eſt ad Lib. 28. Flor. 2.

Eádem methodo fit multiplicatio Aſtronomica, graduum videlicet, minutorum primorum, ſecundorum &c.

Scholium.

Multiplicatio a ſiniſtrâ in dextram uſum habet non levem in diviſione. Fit hunc in modum. I. Nulla nota reſervatur, id enim commodius. II. Si notæ ultimæ multiplicatione peractâ, ex multiplicationibus reliquarum productum aliquod oriatur, duabus notis ſcribendum, ejus nota ſiniſtra ſcribatur infra eam, quæ in priori producto eſt prima, ſeu dextra.

```
 183
   6
----
 688
 41
----
1098
```

Oporteat 183 ducere in 6. 6 in 1 eſt 6.: ſcribo ergo 6 infra lineam. 6 in 8 eſt 48, quia hoc productum conſtat duabus notis, ſiniſtram 4 ſcribo infra 6, & 8 ante 6. 6 in 3 eſt 18, rurſus 1 ſcribo infra 8, & 8 ante 8. Factâ igitur additione, productum quæſitum eſt 1098. Demonſtratio ex ſupra dictis colligitur.

CAPUT VIII.

Multiplicatio expeditiſſima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

LAminarum conſtructio tradita eſt cap. VI. jam uſus earum planè, eximius deinceps exponetur.

PRAXIS.

A.	597	
B	48	
	4776	C
	2388	D
	28656	E

DEntur numeri A, B inter ſe multiplicandi. I. quærantur laminæ, quæ dati majoris A notas habent in vertice, & ſibi mutuò apponantur, adjectâ ad lævam laminâ exponente XZ, *a* ſic., ut in primo, ac ſupremo ordine ſtet numerus datus A.

a tabellam vide c. 6.

II. Minoris dati B notam primam 8 quære in laminâ exponente XZ, ordinemque illi reſpondentem, octavum nempe, exſcribe, infraque lineam repone, & ſit C. Pari modo numeri B notam ſecundam 4 quære in lamina exponente, ordinemque illi reſpondentem, nempe quartum, deſcribe, ſitque D. Sed prima ejus nota 8 ſcribenda eſt infra ſecundam producti primi C. Quod ſi numerus B plures haberet notas, eæ ſimiliter in exponente laminâ repertæ exſcribendos numerorum ordines reliquos indicarent.

III. Producta demum C, D, in unam collecta ſummam E, multiplicationis A per B pro-

productum quæſitum exhibebunt.

Demonſtratio.

FAcilis eſt, tum ex ipsâ laminarum conſtructione, traditâ cap. VI., tum ex iis, quæ de multiplicatione communi demonſtrata ſunt. Numerus enim 56 repertus in laminæ primæ quadrato VIII. eſt octies 7, ac proinde fit ex 8 in 7. Sed, quia 56. duabus conſtat notis; primam 6, quæ in inferiori triangulo eſt ſcribo infra lineam, alteram verò 5, quæ eſt in triangulo ſuperiori, ſervo. Pari modo numerus 72, in ſecundæ laminæ quadrato VIII repertus, eſt octies 9; ac proinde eſt is, qui fit ex 8 in 9. Sed, quia 72 duabus notis conſtat, ejus nota ſecunda 7 ad tertium, prima verò 2 ſola ad ſecundum locum pertinet. Ad eumdem verò etiam pertinet nota 5 ſervata. Ergo hæ duæ notæ 5, & 2 in unam ſunt colligendæ 7, quæ ſecundo loco infra lineam ſcribetur. Atque hæc cauſa eſt, cur ſemper nota trianguli ſuperioris cum notâ ſequentis trianguli inferioris coaleſcat, ac proinde cur notæ, in eodem rhombo exiſtentes, ad locum eumdem pertineant, ſaltem quoad primam aggregati notam. Nam ſi notæ alicujus rhombi collectæ numerum faciant binis notis conſtantem, ſecunda nota ad ſequentem rhombum rejicitur. Poſtremò

597	A.
48	B
4776	C
2388	D
28656	E

numerus 40, repertus in VIII quadrato laminæ tertiæ, eſt is, qui fit ex 8 in 5: cujus ſola prima nota 0 pertinet ad locum tertium,

ad

ad quem, quia etiam pertinet nota ſervata 7, in eodem cum o rhombo exiſtens, eæ rurſum debent coaleſcere. Sed, quia o addito ad 7 manet 7, infra lineam ſcribe 7 loco tertio; alteram verò 4, quæ in ultimo eſt ſuperiori triangulo, quarto loco. Octavus igitur ordo in laminis, hoc eſt numerus ipſe C, eſt is, qui fit ex A 597 ducto in 8 primam notam ipſius B. Pari ratione oſtendam ordinem I V, hoc eſt numerum D, eum eſſe qui fit ex A 597 in 4 ſecundam notam ipſius B. Ergo eorum ſumma E eſt is, qui fit ex A in totum B. *Q. F. D.*

Laminarum igitur artificium in his duobus conſiſtit. Primò, quòd laminæ quælibet componi inter ſe poſſint, ac proinde quivis numerus ſtatui in ſupremo ordine. Secundò, quod numeri, duabus notis conſtantes, in laminis ita deſcripti ſint, ut prima nota in triangulo inferiori, altera in ſuperiori ſit repoſita. Unde fit, ut quia triangulum quodlibet ſuperius cum laminæ ſequentis triangulo inferiori unum rhombum conſtituit, nota ſuperior laminæ præcedentis, quæ ſemper eſt ea ipſa, quæ mente reſervanda eſſet, reperiatur in eodem rhombo cum laminæ ſubſequentis notá inferiori, ſeu primâ, cum qua debet coaleſcere, ut eodem, quo ipſa, loco ſcribatur.

Cæterum quàm expedita, facilis, ſecura hæc methodus ſit, uſu ipſo docebitur, quiſquis voluerit experiri.

CA-

CAPUT IX.

Diviſio.

QUid ſit diviſio, expoſitum eſt defin. XIV. lib. VII., qui nobis primus eſt. Duos proponam modos, quorum primus minùs uſitatus eſt, ſed melior; alter uſitatior quidem, ſed implicatior.

PRAXIS MODI I.

NUmerus detur AC dividendus per numerum Z.

I. Ex dividendo accipe tot notas poſtremas, quot conſtat notis diviſor, vel, ſi hæ numerum efficiant diviſore minorem, ut in exemplo noſtro accidit, cum 459 minor ſit, quàm Z 597, illis unam adhuc appone 0. Atque ita conſtituitur primum diviſionis membrum AB, quod puncto ſecerne.

```
              Z
A  B  C     597  Diviſ.
4590.9.3.
4179     {769
_______  {X
D 411.9
  358 2
_______
E    537.3
     537 3
_______
      0
```

II. Vide, quoties diviſor Z in membro AB contineatur. Id ſi non appareat, quære ultima diviſoris nota 5 quoties contineatur in ultimis duabus notis membri AB Quod ſi diviſor, & membrum æquè multis con-

```
                Z
A   B   C     597 Diviſ.
4590.9.3
4179       {769
--------   {X
D 411.9
  358 2
--------
E     537.3
      537 3
--------
        0
```

conſtarent notis; quærendum eſſet, quoties diviſoris nota ultima 5 contineatur in membri ultimâ. Reperies contineri ſepties: ſcribe igitur 7 poſt lunulam. Non licebit autem poſt lunulam ſcribere unquam ſimul plus, quàm 9; quia, ut demonſtrabo infra, diviſor in membro nunquam continetur ſæpius, quàm novies.

III. Per notam 7, jam in quotiente ſcriptam, multiplica totum diviſorem Z, a ſiniſtrâ in dextram. Productum 4179, quod membro eſſe debet minus, vel æquale, ipſi membro ſubſcribe, ab eoque aufer, & reſiduum D 411, quod minus ſit oportet diviſore Z, ſcribe infra lineam, ante primam ejus notam, puncto adjecto. Hæc omnia ſi ſuccedant, legitima erit nota 7 poſt lunulam in quotiente ſcripta, & primi membri diviſio peracta.

IV. Quod ſi nota in quotiente ſcripta, diviſorem multiplicans, exhibeat productum membro majus, rejicietur, minori ſubſtitutâ: ſi verò productum exhibeat nimis parvum, quod nimirum, ubi a membro ſubtraxeris, reſiduum det diviſore majus, vel æquale, illâ ſimiliter rejectâ, major ſubſtituetur. Examen porro illud notæ poſt lunulam ſcribendæ expeditius redditur multiplicatione a ſiniſtrâ in dextram, ut ſupra præceptum eſt, inſtitutâ.

Ita-

Itaque diviſionis difficultas in hoc potiſſimum conſiſtit, ut talis in quotiente nota ſcribatur, per quam diviſor multiplicatus a membro ſubduci poſſit, & cum ſubductus fuerit, reſiduum exiſtat, vel nullum, vel diviſore minus: talis enim nota indicabit, quoties diviſor contineatur in membro.

V. Membrorum reliquorum ſimilis eſt diviſio. Ad reſiduum 411 D membri prioris A B dextrorſum adſcribe notam 9, quæ membrum A B jam diviſum antecedit. Atque ita ſecundum membrum conſtituitur 411. 9, circa quod eadem operatio inſtituetur, quæ circa primum.

Quæres nimirum, quoties diviſor Z in eo contineatur. Reperies ſexies: ſcribe ergo 6 poſt lunulam ante 7. Diviſorem multiplica per 6, & productum 3582 membro 411. 9 ſubſcribe, ab eoque ſubtrahe; reſiduo E 537 infra lineam repoſito, punctoque ante ipſum notato.

Denique notam 3, quæ dextrorſum ſequitur in dividendo AC, reſiduo E 537 adſcribe, ut habeatur membrum tertium 537. 3. Rurſum quære, quoties diviſor in tertio membro contineatur: reperies novies. Igitur 9 quotienti adſcribe. Diviſorem deinde multiplica per 9, & productum 5373 a membro 5373 ſubtrahe, & nihil reſtat.

His peractis abſoluta eſt diviſio tota numeri dati AC per datum Z.

VI. Si diviſione peractâ ſuperſit aliquid, ut in exemplo hìc appoſito ſuperſunt 5, reſiduum

51. 2 13 *Diviſ.*
39
———

5 ſcribe ſupra diviſorem 13, lineolâ interpoſitâ, ut fiat fractio N. Quotiens erit integer numerus poſt lunulam ſcriptus, unà cum dictâ fractione N.

12. 2 { 5
11 7 { 39 — N
13
—
5

VII. Si operatione primâ abſolutâ, contingat in ſequentium membrorum aliquo (o. 4) diviſorem 5 ne ſemel quidem contineri, quotienti poſt lunulam adſcribetur cifra, & membro apponetur adhuc una dividendi nota 5, lineolâ interpoſitâ, ut appareat o. 45 membrum eſſe geminatum, atque ita membrorum numerus appareat.

10. 4. 5 5 *Diviſ.*
10
—
o. 45 209.
45
—
o

VIII. Ut minor numerus per majorem dividatur, ut 3 per 7, ſcribendus minor ſupra majorem, lineolâ interpoſitâ, ut fiat fractio R. Demonſtrabitur lib. II. cap. II. Theor. I. coroll. II.

$\frac{3}{7}$ R

Demonſtratio.

Z
A B C 597 *Diviſ.*
4590. 9. 3
4179 { 769
X
—
D 411. 9

Tot ſcribuntur notæ poſt lunulam, ac proinde tot notis conſtat quotiens X, quot ſunt membra diviſionis, ut ex

358 2
———
E 537. 3
537 3
———
o

ex operatione præſcriptâ patet. Tot verò ſunt membra, quot notæ in dividendo AC primum membrum AB antecedunt, quod quidem per ſe manifeſtum eſt. Ergo tot notis conſtat quotiens X, quot notæ primum membrum dividendi antecedunt. Liquet igitur ex Poriſm. VIII. cap. III. numeri X, poſt lunulam ſcripti, notam ultimam 7 verum eſſe primi membri AB quotientem, qui nimirum indicet, quoties diviſor Z in primo membro AB contineatur. Pari modo idipſum oſtendam de reliquis notis numeri X poſt lunulam ſcripti, reſpectu membrorum cæterorum. Ergo numerus X verus eſt quotiens, proveniens ex diviſione numeri AC per Z. *Q. E. D.*

51.2 13 *Diviſ.*
39
———
12.2 { 5/13 N
11 7 { 39.
———
5

Quod verò, cum diviſor non metitur dividendum, verus quotiens nihilominus ſit numerus integer 39, unà cum fracto N, cujus numerator eſt is, qui peractâ diviſione reſtat, nominator verò diviſor ipſe; ſic demonſtro. Ut unitas eſt ad *a* quotientem integrum 39, ita diviſor 13 eſt ad dividendum 512, dempto reſiduo 5. Rurſum, ut unitas eſt ad fractum N, ſic *b* nominator 13 ad numeratorem 5, hoc eſt diviſor ad reſiduum. Ergo, ut unitas ad *c* integrum cum fracto; ita eſt diviſor 13 ad totum dividendum. Ergo integer ille cum fracto verus *d* quo-

a patet ex def. 14. l. 7 & ex jam oſtenſis.
b parebis ex theor. 1. cap. 2. l. 2.
c 24. 5.
d defin. 14. 7.

Cur autem nunquam ſimul ad quotientem liceat adſcribere plus, quàm novem; ita fiet manifeſtum. Vel membrum A, & diviſor B æquè multis conſtant notis; vel membrum excedit unâ, (e neque enim poteſt unquam pluribus excedere.) Si æquè multis notis conſtant, liquet ex Poriſmate IV. cap. III., B in A contineri minùs, quàm decies. Si membrum A unâ nota excedat diviſorem B, tunc ultima nota diviſoris major eſt ultimâ notâ membri, ut patet ex num. I.; ac proinde per Poriſma V. cap. III. rurſum continetur B in A minùs, quàm decies. Quare cum diviſor in membro quolibet contineatur ſemper minùs, quàm decies, cauſa jam manifeſta eſt, cur non liceat unquam ad quotientem plus ſimul adſcribere, quàm 9.

A	2996
B	1000

A	2999
B	300

e patet ex nu. 1.

PRAXIS MODI II.

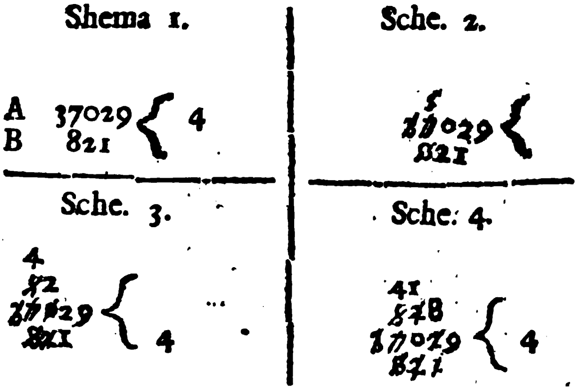
Oporteat numerum A dividere per numerum B.

I. Diviſorem ſubſcribe dividendo ad ſiniſtram, ſic, ut nota ultima ultimæ reſpondeat, penultima penultimæ, & ſic deinceps. Quod ſi numerus ſupra diviſorem poſitus 370 k tunc minor eſſet diviſore, oportebit diviſorem ad unum locum promovere dextrorſum, ut in exemplo cernitur.

k Sche. 1.

Cenſetur autem ſupra diviſorem eſſe poſitum, quidquid illi ad lævam eſt. Unde ſupra 821 eſt 3702; ſupra 8 eſt 37; ſupra 2 eſt 370.

Schema



Nota. Characteres, quibus ad dextram hic virgula eſt, cenſetur, deleti.

II. Quære quoties diviſor in notis ſupra ipſum poſitis contineatur. Sed quia plerumque hoc judicatu difficile eſt, quære quoties ultima diviſoris nota 8 in numero ſupra ipſam ſcripto 37 contineatur, reperies contineri quater.: ſcribe ergo 4 poſt lunulam.

III. Per notam 4, in quotiente ſcriptam, multiplica totum diviſorem, & productum ſubtrahe a notis 3702. ſupra diviſorum ſcriptis: & reſiduo ſupra eaſdem ſcripto, dele tam diviſorem, quàm notas ſupra ipſum poſitas. Malunt autem plerique ſingulas ſeorſim notas diviſoris, per quotientem 4 multiplicatas, a numeris ſupra ipſas poſitis ſubducere, ſubtractione videlicet multiplicationi alternatim interpoſitâ.

Exemplum.

a 8 in 4 facit 32, quæ ſubtracta ex 37 relinquunt 5: dele *b* 37, & 8; 5 vero ſcribe ſupra 7. Rur-

a Sche. 1.
b Sche. 2.

7. Rurſum 2 in 4 faciunt 8, quæ ſubtracta ex
c Sche 3. 50 relinquunt 42: dele c igitur 50, & in diviſore 2; reſiduum verò 42 ſcribe ſupra 50. Denique 1 in 4 facit 4, quæ ſubtracta a 422 relin-
d Sche. 4. quunt 418: dele d igitur 422, & 1; reſiduum autem 418 ſcribe ſupra 422. Atque ita diviſoris applicatio una peracta eſt.

e Sche. 2. II. Verùm e, quia ultima diviſoris nota 8, per quotientem 4 multiplicata, & ſubtracta ex 37, etiam nota penultima 2, per eumdem quotientem 4 multiplicata, ſubtrahi, debet a reſiduo 50 ſupra ipſam poſito, itemque & prima
f Sche. 3. 1 multiplicata f per quotientem eumdem 4 ſimiliter a reſiduo ſupra ipſum ſcripto 422 ſubducenda eſt: hinc fit, ut dum quæritur, quoties diviſoris nota ultima 8 in notis ſupra ipſam exiſtentibus 37 contineatur, talis poſt lunulam nota in quotiente ſit reponenda, per quam ſingulæ notæ diviſoris multiplicatæ poſſint ſubtrahi a numeris ſupra ipſas ſcriptis, & eâ quidem adhùc lege, ut ultimâ ſubtractione peractâ,
g Sche. 4. reſiduum 418 g ſit vel nullum, vel diviſore minus, quemadmodum num. IV. modi I. eſt traditum. Quare ſi primâ ſubtractione factâ, nequeat peragi ſecunda, aut his peractis, tertia; nota poſt lunulam ſcripta minuenda eſt unitate eòuſque, donec ſubtractiones ſingulæ poſſint abſolvi. Prius igitur, quàm opereris, ſeriò tota operatio num. III. præſcripta erit mentaliter peragenda, ut nota in quotiente adſcripta examinetur. Quod ſanè non Tyronibus modo, ſed etiam non raro exercitatis ſubmoleſtum eſt. Unde ſatius erit, hoc examen notando ſeorſim inſtituere.

Exemplo jam dicta declaremus. Detur M de-

Sche. 5.

	11
M.	7782)
N.	249) 32

dividendus per N. Quæro, quoties N in notis ſupra ipſum poſitis 738 contineatur. Reperio ter. Scribo ergo 3 poſt lunulam. 2 in 3 facit 6, quæ ablata a 7, relinquunt 1. 4 in 3 facit 12, quæ ablata a 13, relinquunt 1. 9 in 3 eſt 27, quæ ex 18 auferri nequeunt. Nota igitur 3, ad quotientem ſcripta, nimis magna eſt. Quare hac rejectâ, ſubſtituo 2, & examen repeto, 2 in 2 ſunt 4, quæ ſubtracta ex 7 relinquunt 3. 4 in 2 ſunt 8, quæ ſubtracta ex 33 relinquunt 25. 9 in 2 ſunt 18, quæ ſubtracta a 258, relinquunt 240. Nota igitur 2 legitima eſt.

Sche. 6

24
380
7782
246.

Quamvis autem plerique, ut dixi ſupra, ſubtractionem multiplicatione permiſceant, modo jam explicato; mihi tamen videtur conſultius, ut multiplicatio tota ſimul abſolvatur, & quidem a ſiniſtrâ in dextram, adhibitâ cautione numero IV. modi I. præſcriptâ.

V. Applicatione primâ diviſoris abſolutâ, quæ Schem. I. II. III. IV. exhibetur, promovebitur diviſor B unâ notâ verſus dextram, uti factum vides in Schem. VII, & operatio inſtituetur per omnia ſimilis hactenus traditæ. Atque ita deinceps applicationes reliquæ, ſi plures eſſent faciendæ, abſolventur.

Schem. 7.

	41	
	338	
A.	27629	{ 4
	821	
B.		

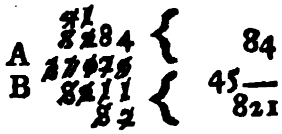
VI. Si factâ aliquâ promotione diviſoris, is ne ſemel quidem in notis, ſupra ſe poſitis, contineatur; ad quotientem ſcribatur cifra, & diviſor unò adhuc loco promoveatur, nullâ in dividendo notâ deletâ.

VII. Si quid ſuperſit diviſione peractâ, fiet quod præſcriptum num. VI. modi I.

Schem. VIII. exhibetur numeri A per numerum B diviſio tota, quæ ſupra, tantùm declarandi gratiâ, pluribus ſchematis fuit exhibita.

Demonſtratio

Schem. VIII.



HUjus modi ſimilis eſt demonſtrationi præcedentis.

Quamvis autem hæc ratio dividendi paſſim ſit uſitata, priorem tamen illam longè meliorem ſentio: uſitata ſiquidem, dum notas expungit, veſtigia diviſionis, ac membra confundit, ut ſi quid erratum ſit, correctio adhiberi plerumque vix poſſit, ut ex ſchem. VIII. ſatis apparet. Prior verò illa & ſingula diviſionis membra, & ſingularum producta multiplicationum, & quæ ſubtractione factâ ex membris ſingulis manent reſidua, diſtinctè exhibet. Quo fit, ut facilis ſit correctio, ſi error irrepſerit.

Plures alii modi diviſionis, qui non minus ingenii, quàm utilitatis habent, apud præfatum Auctorem a *videri poſſunt.*

a Deſaig. pag. 143.

USUS

USUS TABUBLÆ PYTHAGORICÆ

Communis in Diviſione.

DAtus ſit numerus quicumque, duabus notis conſtans E, & nota quævis ſimplex F. Quæritur quoties F in E continetur.

62	E
8	F

Quæratur *o* in latere A B nota F, & in lineâ numericâ illi reſpondente numerus E, aut eo proximè minor 56. Ab hoc numero ſurſum aſcendendo ad latus A C, incides in quotientem quæſitum 7.

o vide tabel. c. 6.

Ratio patet ex conſtructione tabulæ, cap. VI. traditâ.

DIVISIONIS COMPENDIA.

C 2889 | 829 D 1000

$$\left\{ 2889 \frac{829}{1000} \text{ G} \right.$$

I. CUm ultima nota diviſoris D eſt unitas, & reliquæ omnes cifræ; a dividendo C aufer tot ad dextram notas 829, quot cifras habet diviſor; reliquas 2889 ſcribe poſt lunulam, quibus appone notas abjectas 829 ſupra diviſorem 1000 ſcriptas, lineolâ interpoſitâ: quotiens erit 2889 numerus integer, poſt lunulam ſcriptus, unà cum fractione G. Quod ſi notæ abjectæ etiam cifræ ſunt, ut in exemplo, quotiens erunt ipſæ notæ ad ſiniſtram reſiduæ 342.

Demonſtratio

	Diviſ.	
342 | 000		1000
	342 *Quotiens*	

FAcilè colligitur ex Poriſm. VIII. c. III. Quin etiam patet ex ſecundo compendio multiplicationis c. VII. Nam 1000 multiplicans 342, producet 342000. Ergo 1000 dividens 342000 facit quotientem 342: ut patet ex definitione XIII, & XIV. L. VII. Per defin. quippe XIII. L. VII., ut unitas eſt ad 1000, ita 342 eſt ad productum
a 18. 5. 342000. Ergo *a* permutando, ut unitas eſt ad 342, ita 1000 eſt ad 342000. Ergo per defin. XIV. 1000 dividens 342000, dat quotientem 342.

II. Cum diviſor B conſtat aliis notis ſignificativis unâ, vel pluribus diverſis ab unitate, ad dextram verò habet cifras; a dividendo A rur-

A. 2. 4. 9. | 46		B 2 | 00	
2			146
0.4			124 — m
0.9			200
9			
1			

ſum aufer ad dextram tot notas 46, quot habet cifras diviſor, & notæ reliquæ 249 dividantur per ſolas diviſoris notas ſignificativas. Diviſione peractâ, ſiquid ſuperſit, quemadmodum hic

ſuper-

ſupereſt 1, id cum notis abjectis 46 quotienti integro 124 appone, diviſore ſcripto inferius, & lineolâ interpoſitâ. Quotiens erit integer 124 cum fracto *m*.

Demonſtratio

EX Poriſm. VIII. c. III, vel etiam ex compendio I. multiplicationis c. VII. diſcurſu ſimili, ut paullo ante, elicitur.

```
C. 27. 2.000 3 D 4
   24
   ---
   3.2.
   3.2.  { 68000.
   ---
    0
```

III. Cum dividendus habet cifras ad dextram, & nihil ex notis ſignificativis ſupereſt, tot quotienti adſcribentur cifræ, quot poſt ultimum membrum ſignificativum cifræ reſtant in dividendo.

Eſto C dividendus per D: 4 in primo membro 27 continetur ſexies. Scribo ergo 6 poſt lunulam. 4 in 6 eſt 24, quæ ſubſcribo membro 27, ab eoque ſubtraho, & reſiduum 3. repono infra lineam, eique adſcribo notam dividendi proximam 2, ut habeam ſecundum membrum 32. 4 in 32 continetur octies: ſcribo 8 in quotiente. 4 in 8 facit 32, quæ ſubtracta ex membro 32, nihil relinquunt. Quia verò in dividendo jam nihil reſtat, præter cifras, adſcribo quotienti cifras totidem, & peracta eſt diviſio.

Demonſtratio ex Poriſm. VIII. cap. III.

SPECIES DIVERSÆ

EUmdem ad modum tractandæ, qui traditur in multiplicatione cap. VII.

CAPUT X.

Diviſio facillima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

IN opere diviſionis præcipuum faceſſit negotium inventio quoti, ſeu quotientis, per quem multiplicandus eſt diviſor. Hunc quotum, quin etiam productum ipſum ex diviſore, in quorum multiplicato, admirabili compendio laminæ exhibent. Cætera omnia peraguntur, ut in modo primo cap. præcedentis, qui aptior eſt huic methodo, quàm ſecundus.

```
              Z
 a   b   c   597  Diviſ.
 4590.9.3.
 4179        {769
 ___________ {X
 d 411.9
    358 2
 ___________
 e 537.  3
   537   3
 ___________
         o
```

Datus Sit numerus AC dividendus per numerum Z.

I. Appone ſibi mutuò laminas, quæ in primo, eoque ſupremo ordine exhibeant diviſorem Z. Præter ſchema hic appoſitum, inſpice tabellam AX cap. VI.

II. Determina membrum primum AB, ut num. I. modi primi cap. X.

III.

III. Vide, quis ordo in laminis numerum contineat membro æqualem, vel proximè minorem. Is autem ordo eſt proximè minor membro, quem immediatè ſequitur ordo, membro major. Numerus laminæ exponentis XZ, ordinem denominans, eſt quotus, poſt lunulam ſcribendus.

In exemplo noſtro reperis, ordinem proximè minorem membro eſſe ſeptimum. Scribe ergo 7 poſt lunulam.

IV. Ordinem inventum, qui eſt ipſum productum ex diviſore in quotum 7, exſcribe infra membrum AB, ab eoque ſubtrahe, & infra lineam ſcribe reſiduum 411, cui adjice, puncto interpoſito, notam 9, quæ in dividendo membrum primum A B antecedit, ut habeatur membrum ſecundum 411. 9.

V. Diviſio ſecundi membri, & ſequentium eodem modo peragetur, quo primi.

VI. Si membrum eſt minus ipſo diviſore, ac proinde & primo laminarum ordine, qui nimirum continet diviſorem; quotienti cifra adſcribetur, & membro adhuc una adjicietur nota ex dividendo, ut membrum habeatur novum.

VII. Si nonus ordo eſt membro minor, in quotiente ſcribatur 9.

Porro, exercitatione vel minimâ accedente, momento cernitur, quis ordo proximè minor, aut major membro ſit. Revocanda ſunt in memoriam Poriſmata II, ac III cap. III: item quæ monui cap. VI de modo exſcribendi, ac legendi ordines. Deinde reflectendum eſt maximè ad ultima loculamenta ordinum, quanta nimirum ſit nota in poſtremo ad lævam triangulo; & an ſumma notarum Rhombi proximi

exce-

excedat novem, adeoque num aliqua inde nota in triangulum poſtremum ſit rejicienda, &c.

Demonſtratio

FAcilè colligitur ex demonſtratis cap. IX. & ex ipsâ diviſionis definitione, quam vide ante lib. VII. def. XIV.

Quàm verò præſtans ſit hæc dividendi ratio, nemo certiùs intelliget, quàm qui fuerit expertus. Plures ſanè diviſiones unâ, alterâve horâ ſic expediet, quàm die integro viâ communi. Ad hoc temporis, atque operæ ingens compendium accedit operationis ſecuritas, quæ errori ex incuriâ, & hallucinatione orto vix locum ullum relinquit.

C A P. X I.

Additionis, Subtractionis, Multiplicationis, Diviſionis examina.

TUtiſſimum eſt, ut per invicem hæ ſpecies examinentur, cum reliquæ Praxes ſint errori obnoxiæ.

ADDITIONIS EXAMEN

123	A
25	B
——	
148	X
25	
——	

FIt per ſubtractionem. Eſto ſumma X, facta ex additione duorum numerorum A, & B. Alterutrum additorum, puta B, ſubtrahe à ſummâ X. Si reſiduus C ſit idem cum Altero A, rectè pera-

123

123 C cta fuit additio. Erratum eſt, ſi non eſt idem.

Quòd ſi exiſtat ſumma Z ex additione trium numerorum D, E, F, aut plurium; examen inſtituetur hunc in modum. Incipe à ſiniſtrâ, & dic 2, 8, 4 ſunt 14; hæc ſubtracta ex 16 relinquunt 2, quæ cum 0 faciunt 20. Dein 9, 3, 7 faciunt 19; hæc ablata ex 20 relinquunt 1, quod cum 8 facit 18. 7, 5, 6 faciunt 18, quæ ablata ex 18 nihil relinquunt. Proba igitur fuit additio, cum ſumma Z æqualis reperiatur omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

297	D
835	E
476	F
1608	Z
210	

SUBTRACTIONIS EXAMEN

Fit per additionem reſidui X ad numerum ſubtractum H: ſi enim ſumma K inde facta conveniat cum numero G, a quo facta eſt ſubtractio, proba eſt ſubtractio; mala, ſi non conveniat.

234	G
52	H
182	X
52	
234	K

Licebit etiam ſubtractionem examinare per ſubtractionem. Reſiduum X ſubtrahe ab G, & novum reſiduum ſit L. Si hoc conveniat cum numero H prius ſubtracto, bona fuit prior ſubtractio. Ratio utriuſque examinis manifeſta eſt.

234	G
52	H
182	X
52	L

EXAMEN MULTIPLICATIONIS

FIt per diviſionem. Numeri ſe mutuò multiplicantes ſint N, P. Per multiplicantem P divide productum Q. Si quotiens R conveniat cum multiplicato N, rectè inſtituta fuit multiplicatio; malè verò, ſi non conveniat.

```
  523 N
    6 P ( 523 R
 ----
 3138 Q
```

a def. 13. & 14. Ratio patet ex notione primâ *a* multiplicationis, ac diviſionis, & XVI. L. VII.

Si per laminas facta eſt multiplicatio, vix opus ullo examine: adeo ſecura eſt ab errore iſta methodus. Si tamen volueris examinare, nullum erit examen facilius, quàm ipſa multiplicationis iteratio.

EXAMEN DIVISIONIS

FIt per multiplicationem. Diviſor B multiplicetur per quotientem C: ſi producatur numerus diviſus A, proba eſt diviſio, ut patet ex definitione *f* diviſionis, ac multiplicationis, & XVI. L. VII.

f def. 13. & 14. 7.

```
 A    B
2, 4 8.  2 Diviſ.
2
----     { 124
0. 4     {  C
   4
----
0.  8
    8
   --
    0
```

Si poſt diviſionem aliquid ſuperſit, diviſorem E multiplica per quotientem F: producto G adde reſiduum 2. Si ſumma H ſit æqualis dividendo A, proba eſt diviſio.

A E

A	E
24. 1. 1.	3: *Diviſ.*
24	803 F
—	
0. 1. 1.	G
9	2409
—	
2	2
	——
	H. 2411

Quod ſi per laminas peracta diviſio eſt, vix opus erit examine ullo. Si tamen examinare placuerit, multiplicatio ad examen requiſita, iiſdem manentibus laminis, quæ diviſioni inſervierunt, perficietur.

Scholium.

MOdi examinandi per abjectionem novenarii, quoniam fallaces ſunt, hic non lubuit adſcribere. Nituntur tamen inſigni proprietate ejuſdem numeri.

I. Metitur enim novenarius omnem numerum, cujus notæ acceptæ tanquam ſimplices conficiunt 9. *Tales numeri ſunt* 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, *& alii infiniti.*

II. Imò cujuſcunque numeri, a novenario numerati, notæ ſimpliciter acceptæ conficiunt 9, *illis tantum numeris exceptis, quorum omnes notæ ſunt* 9, *cujuſmodi ſunt* 99, 999, *&c.*

III. Si numerus quicumque, duabus notis conſtans, quem 9 *non metitur, dividatur per* 9, *idem erit reſiduum cum eo, quod remanet, ſi notæ ſimpliciter acceptæ dividantur per* 9. *Ut ſi* 64 *dividatur per* 9, *remanet* 1. *Accipiantur jam notæ ſecundum valorem ſimplicem,*

6, *&*

6, & 4 faciunt 10, quæ diviſa per 9, etiam relinquunt 1. Patet ex I. & II.

IV. Quod ſi notæ, numerum datum componentes, ſimpliciter acceptæ, conficiunt minus, quàm 9; hoc, quod conficiunt, erit ipſum reſiduum, quod relinquetur, numero dato per 9 diviſo. Dentur 33: hæc diviſa per 9 relinquunt 6, quantum videlicet conficiunt ipſæ notæ ſimplices 3, & 3.

V. Atque ex his demum conſequens eſt, ex quovis numero diviſo per 9 idem relinqui, quod relinquitur ex notis ejuſdem numeri ſimpliciter acceptis, ſi per 9 dividantur.

Neminem legi, qui horum cauſam aperiat. Indicabo fontem verbo. Novenarius eſt unitate minor denario. Hoc rite ſi expendas, & applices, proprietates inde jam recenſitas non difficulter deduces.

Porro quamvis hæc proprietas & pulchra ſit, & veriſſima, examina tamen per illam inſtituta fallunt. A notis ſiquidem omnium numerorum addendorum ſimpliciter acceptis 9 abjiciuntur quoties poſſunt, hoc eſt dividuntur illæ per 9, & reſiduum ſervatur. Similiter a notis ſummæ ſimpliciter acceptis abjiciuntur 9, quoties poſſunt. Quod ſi reſiduum idem ſit cum priori reſiduo, concluditur, rite fuiſſe peractam additionem. Sed fallit concluſio, quia licet plerumque tum erratum non ſit, infiniti tamen caſus dari poſſunt, in quibus hoc examen indicet additionem eſſe bonam, quæ mala eſt. Ratio eſt, quia poteſt novenarius, imò & quivis numerus, dividendo duos numeros inæquales, idem exhibere reſiduum: quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

En Exemplum.

358	A
234	B
835	C

In numeris A, B, C, 3, & 5 ſunt 8, & 8 ſunt 16. Abjectis 9 reſtant 7, quæ cum 2 faciunt 9: quibus abjectis 3, & 4 faciunt 7. Numeris igitur A, B diviſis per 9. reſtant 7. Jam in numero C 8, & 3 faciunt 11: abjectis 9 reſtant 2, quæ cum 5 faciunt 7. Utrobique igitur tam ex addendis A, B, quàm ex ſummâ prætenſa C ſuperſunt 7: neque tamen C verà ſumma eſt A, B, conficiunt enim illi 592. Pari modo in ſubtractione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione hujus examinis fides ſuſpecta eſt.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ
LIBER II.
LOGISTICA FRACTORUM NUMERORUM.

CAPUT I.

Fractorum Numerorum Definitio, Scriptio, Enunciatio.

NUmerus fractus, qui etiam fractio, & minutia dicitur, eſt pars, vel partes unitatis, aliquod totum diviſibile repræſentantis. Ut ſi totum aliquod ſectum ſit in quinque partes æquales, & quiſpiam ex illis ſumpſerit tres; dicentur illæ tres quintæ partes numerus fractus.

Quoniam igitur fractus numerus eſt pars, parteſve alicujus totius, duobus numeris ſcribi debet, quorum unus indicet quot partes ex toto accipiantur, alter quales. Scribuntur porro duo illi numeri ſupra invicem, lineolâ interpoſitâ. Ut vides in his exemplis.

Supe-

$$A\frac{1}{2} \quad B\frac{2}{3} \quad C\frac{4}{7} \quad D\frac{11}{13}$$

Superior numerus indicat, quot ex toto partes accipiantur, inferior deſignat, in quot partes totum ponatur diviſum, ac proinde quales ſint partes illæ, quæ ex toto ſunt acceptæ.

Superior igitur, quia partium ex toto acceptarum indicat numerum, numerator dicitur, inferior autem, quia partium acceptarum deſignat ſpeciem, nominator, ſeu denominator appellatur.

Fracti A, B, C, D ſic enunciantur. A una ſecunda, ſeu una dimidia, B duæ tertiæ, C quatuor ſeptimæ, D undecim decimæ tertiæ.

Quamvis autem pro toto diviſibili plerumque unitas ſupponatur, numerus tamen quicunque ſupponi poteſt. Quare E fractus, ſi totum ſint 64 aurei, ſignificat quinque octavas partes 64 aureorum.

$\frac{5}{8}$ E

Denique ad fractorum naturam penitus intelligendam, id erit ſtudioſè obſervandum, fractos ab integris numeris quoad rem non differre. Ea ſola differentia eſt, quod fracti deſignent res, quæ ſint partes rerum ab integris numeris deſignatarum, ac proinde, quod unitates fracti numeri ſint relativæ: integri vero numeri unitates ſint abſolutæ. Dentur exempli gratiâ floreni 125, & fractio *a*, hoc eſt 4 vigeſimæ unius floreni. Numerus integer 125 continet centum viginti quinque unitates, quarum ſingulæ florenum deſignant, fractus ſimiliter *a*, hoc

eſt quatuor vigeſimæ partes flore-
ni, continet quatuor unitates, $\frac{4}{20}$ a
quarum ſingulæ deſignant unam partem vigeſimam floreni, hoc eſt aſſem unum, ac proinde $\frac{1}{3}$ b
quatuor vigeſimæ floreni ſignificant 4 aſſes, qui tam eſt numerus integer, quàm 125 floreni. Imò quilibet numerus integer, res quantas $\frac{3}{5}$ c
deſignans fractus eſt, ſi cum majori toto comparetur. Nam 2 floreni ſunt una tertia unius libræ, ſive *b*; & 3 pedes ſunt tres quintæ unius paſſus, ſive *c*; & 2000 paſſus ſunt $\frac{2}{5}$ d
duæ quintæ unius milliarii Italici, ſive *d*. Ad hæc Tyrones advertere, multum intereſt. Cauſa namque præcipua, ob quam illis fractorum numerorum tractatio difficilis, & obſcura videri ſoleat, ea eſt, quod prius ad operationes fractorum, ac regulas addiſcendas proſiliant, quàm illorum naturam perſpexerint.

Monitum Generale.

CUm duæ fractiones, aut plures inter ſe comparantur, ſemper intelligendæ ſunt, eſſe partes ejuſdem totius, niſi contrarium indicetur.

CA-

CAPUT II.

Fractorum Theoria Prima.

THEOREMA I.

FRactus omnis eſt ad totum, ſeu unitatem, ut numerator ad denominatorem.

Demonſtratio.

PAtet ex definitione numeri fracti capite præcedenti explicatâ. Denominator enim deſignat ipſum totum ſectum in tot partes æquales, quot in denominatore unitates ſunt. Numerator verò indicat, quot partes ex toto ita ſecto accipiantur. Quare cum fractus nihil aliud ſit, quàm ille ipſe partium numerus, quas acceptas eſſe ex toto, numerator indicat, manifeſtum eſt, fractum eſſe ad totum, ut numerator eſt ad nominatorem. Ex hoc rite intellecto exiſtunt

Corollaria.

I.

$\frac{30}{20}$ a CUm numerator eſt minor denominatore, fractus ſuo toto minor eſt.

$\frac{20}{20}$ b Cum numerator nominatore major eſt, fractus eſt major toto. Sic

$\frac{3}{3}$ c fractus *a*, id eſt triginta vigeſimæ, exemp. gr., floreni, hoc eſt 30 aſſes, ſunt majores toto, nempe floreno, ſeu 20 aſſibus.

$\frac{4}{4}$ d

Cum numerator numeratori æqualis eſt, fractus toti æquivalet. Sic *b*, id eſt 20 vigeſimæ floreni, hoc eſt 20 aſſes, conficiunt florenum. Sic *c*, *d* æquivalent unitati, ſeu toti, quod unitas repræſentat.

II.

$\frac{2}{3}$ f

Ex theoremate colligitur veritas illius, quod num. VIII. cap. IX. in modo primo diviſionis traditur: nimirum cum numerus 2 minor per majorem 3 dividendus eſt, quotientem haberi, ſi major minori ſubſcribatur, ut fiat fractio *f*. In omni
defin. 14. ſiquidem diviſione quotiens eſt ad unitatem, ut dividendus, qui hìc eſt 2, ad diviſorem, qui hìc eſt 3. Sed etiam fractio *f* eſt ad unitatem, ut 2 ad 3. Ergo *f* hìc eſt quotiens.

THEOREMA II.

Si fracti unius numerator a *eſt ad nominatorem* b, *ut fracti alterius numerator* c *eſt ad ſuum numeratorem* d, *fracti æquales erunt.*

	E	F	
a	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	c
b			d

Demonſtratio.

Fractus E eſt ad totum, ut numerator *a* ad nominatorem *b* per theor. I., hoc eſt per hyp., ut numerator *c* ad nominatorem *d*, hoc eſt per theor. I., ut fractus F ad idem totum. Quare cum ambo fracti E, & F ad totum, quod in utroque idem eſſe ſupponitur, eamdem

habeant

habeant proportionem, per IX. lib. V. æquales erunt. *Q. E. D.*

Itaque valor fractorum non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, ſed ex proportione eorundem æſtimandus eſt, quod ulterius ex theor. III. IV. V. innoteſcet.

THEOREMA III.

Fractus ille A major eſt altero B, cujus numerator e *ad nominatorem* f *majorem habet proportionem, quàm alterius numerator* g *ad nominatorem ſuum* h.

	A	B	
e	8	2	g
	—	—	
f	16	6	h

Demonſtratio.

Nam per theor. I fractus A ad totum eamdem proportionem habet, quam *e* ad *f*; hoc eſt ex hyp. majorem, quam *g* ad *h*; hoc eſt per theor. I. majorem, quam fractus B ad totum idem. Ergo per X. lib. V. fractus A fracto B major eſt. *Q. E. D.*

THEOREMA IV.

Fracti, quorum numeratores in mutuos denominatores ducti eumdem gignunt numerum, æquales ſunt.

Dentur fracti E, F; & tam *a* in *d*, quam *c* in *b* producant eumdem numerum *k*. Dico, fractos E, F æquales eſſe.

	E	F	
a	2	3	c
	—	—	
b	4	6	d
k	12		

 Demon-

Demonſtratio.

PEr XIX. l. VII. erit *a* ad *b*, ut *c* ad *d*. Ergo per theor. II. fracti E, F æquales ſunt. *Q. E. D.*

THEOREMA V.

FRactus ille A altero B major eſt, cujus numerator multiplicans alterius nominatorem majorem gignit numerum.

Producat *g* in *n* majorem numerum *c*, quàm *m* in *h*. Dico, A fractum majorem eſſe fracto B.

	A	B	
g	2	3	m
	—	—	
h	4	9	n
c	18	12	d

Demonſtratio.

QUia *c* genitus ex *g* in *n* major eſt *d* genito ex *m* in *h*, habebit per corol. II. prop. XIX. l. VII. *g* ad *h* majorem rationem, quàm *m* ad *n*. Ergo per theor. III. fractus A major eſt fracto B. *Q. E. D.*

Corollarium.

EX IV. & V. theoremate modus habetur facillimus examinandi, fracti ne æquales ſint, an inæquales, & uter major ſit.

THEO-

THEOREMA VI.

F*Racti D, G, idem nomen habentes p, eam inter ſe proportionem habent, quàm numeratores* m. n.

Demonſtratio.

PEr theor. I. fractus D eſt ad totum, ut *m* ad *p*. Idem verò totum eſt ad fractum G, ut idem *p* eſt ad *n*: Ergo ex æquo per XXII. V. fractus D eſt ad fractum G, ut *m* ad *n*. *Q. E. D.*

D		G	
m	7	5	n
p	8	8	p

THEOREMA VII.

D*Entur fracti P, R: primi numerator* a *multiplicans alterius nominatorem* o *faciat* a o; *alterius vero numerator* c *multiplicans nominatorem primi* n *producat* c n. *Erit fractus P ad fractum R, ut* a o *ad* c n.

Demonſtratio.

NOminatores *n*, & *o* invicem multiplicantes producant *n o*. Fractus P eſt ad totum, ut *a* ad *n*, per theor. I. Sed etiam per ſchol. prop. XVII. l. VII. *a o* eſt ad *n o*, ut *a* ad *n*. Ergo fractus P eſt ad totum, ut *a o* eſt ad *n o*. Atqui per ſchol. prop. XVII. *n*

no
ao cn
a c
P—— ——R
n o
To-tum:

 o eſt

o eſt ad *c n*, ut o ad *c*; hoc eſt per theor. I., ut totum eſt ad fractum A. Igitur ex æquo per XXII. V. fractus P eſt ad fractum R, ut *a o* eſt ad *c n*. *Q. E. D.*

THEOREMA VIII.

SI duo fracti C, D eumdem numeratorem habuerint a, *erit prior C ad poſteriorem D, ut reciprocè poſterioris nominator* o *ad prioris nominatorem* n.

Demonſtratio.

EX *a* in *o* fiat *a o*, & *a n* ex *a* in *n*. Per præced. fractus C eſt ad fractum D, ut *a o* ad *a n*; hoc eſt per ſchol. prop. XVII. lib. VII., ut *o* ad *n*. *Q. E. D.*

$$C\ \frac{a}{n} \qquad \frac{a}{o}\ D$$

$$ao \qquad an$$

CAPUT III.

Reductiones Fractorum.

PROBLEMA I.

Reductio fractorum ad minimos terminos.

DIcitur fractio ad minimos terminos reduci, cum reperitur ei æquivalens alia, minimis numeris expreſſa.

Datus ſit fractus A ad minimos terminos reducendus. Per prop. XXXV. lib. VII. inveniantur numeratori *n*, ac nomi-

$$A\ \ n\,\frac{27}{36}\,p \qquad B\ \ \frac{3}{4}\,r$$

natori *v* proportionales minimi *r*, & *t*, ex quibus fractus conſtituatur B. Hic eſt quæſitus.

Demonſtratio.

NAm quia per conſtr. *r* eſt ad *t*, ut *n* ad *p* æquales erunt fracti, A, & B, per theor. II. cap. præced. Neque poteſt alius fractus, qui minoribus terminis conſtet, fracto A æqualis exhiberi: ad hoc enim, ut patet ex II. theor., requirerentur duo numeri ipſis *n*, *p* proportionales, & minores minimis jam repertis *r*, *t*: quod fieri non poteſt.

Quod ſi *n*, *p* termini fractionis datæ A ſint in proportione ſuâ minimi, non poterit fractio data in terminis minoribus exhiberi. Utrùm verò *n*, *p* ſint in ratione ſuâ minimi, innoteſcet ex ipsâ conſtructione prop. XXXV. l. VII. Et univerſim per XXXIII. l. VII. omnes numeri inter ſe primi ſunt in ſuâ proportione minimi.

PROBLEMA II.

Reductio fractorum ad nomen idem.

PARS I.

DAti ſint duo quilibet fracti N, P ad commune nomen reducendi.

	N		P	
a	3		5	c
b	4		6	p

Deno-

Denominatores, invicem ſe multiplicantes, dabunt nominatorem communem *b d*. Tum numerator *a* ductus in nominatorem *d* producat *a d*: erit fractus R æqualis dato N. Rurſum numerator *c* ductus in nominatorem *b* gignat *c b*: erit fractus T par dato P.

R		T	
ad	18	20	cb
bd	24	24	bd

N		P	
a	1	3	c
b	4	6	d

Demonſtratio.

$$R\ \frac{6}{24}\quad\frac{12}{24}\ T \qquad R\ \frac{ad}{bd}\quad\frac{cb}{bd}\ T$$

PEr ſchol. pr. XVII. l. VII. *a d* eſt ad *bd*, ut *a* ad *b*. Ergo per 1 theor. II. cap. præc. fracti N, & R æquales ſunt. Similiter, quia per idem ſchol. *c b* eſt ad *b d*, ut *c* ad *d*, rurſum per theor. II. fracti P, & T æquales erunt. Datos igitur N, P ad idem nomen reduximus. *Q. E. F.*

PARS II.

DAti ſint tres fracti G, H, I, aut plures ad nomen idem reducendi.

G		H		I	
a	3	c	5	e	1
b	4	d	6	f	8

R	T	V
adf	cbf	ebd
bdf	bdf	bdf

R	T	V
144	160	24
192	192	192

Deno-

Denominatores b, d, f inter ſe multiplicati dabunt denominatorem communem bdf. Numeratores ſinguli provenient, ſi numerator uniuſcujuſque fractionis datæ multiplicet productum ex nominatoribus reliquarum.

Sic, ut fractus G reducatur ad nomen bdf, ejus numerator a ductus in df, genitum ex nominatoribus reliquorum H, I, producat adf, erit fractus R fracto G æqualis. Ut reducatur H, ejus numerator ductus in bf, genitum ex denominatoribus reliquorum G, I, producet cbf, proveniet fractus T par dato H. Pari modo V æqualis proveniet dato I.

Demonſtratio.

adf eſt ad bdf, ut a ad b per ſchol. p. XVII. l. VII. Ergo per theor. II. cap. præc. R, G æquales ſunt. Pari ratione cbf eſt ad bdf, ſeu per ſchol. p. XIX. l. VIII. dbf, ut c ad d. Ergo per theor. II. etiam fracti T, H æquales ſunt. Denique quia ebd, eſt ad bdf, ut e ad f; æquales erunt fracti V, I. Reducti ſunt igitur fracti G, H, I, ad nomen idem. *Q. E. F.*

Operationem totam utriuſque partis ipſe litterarum conſpectus exhibet: qui ſanè Logiſtices ſpecioſæ fructus eſt proprius, & longè nobiliſſimus.

PARS III.

Dentur fracti quotcunque A, B, C, quos oporteat ad idem nomen reducere, & in minimis termi-

A	B	C
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$

terminis.

Inveni per XXXVI. & XXXVIII. lib. VII. minimum numerum 24, quem nominatores dati 4, 6, 8 metiuntur. Is erit communis nominator.

		24
6	4	3
18	20	3
—	—	—
24	24	24
D	E	F

Hunc nominatores dati 4, 6, 8 dividant per quotientes 6, 4, 3, qui ſi multiplicentur per numeratores datos 3, 5, 1. provenient 18, 20, 3 numeratores novi, eruntque fracti D, E, F ejuſdem nominis datis A, B, C æquales, in terminis minimis.

Demonſtratio.

QUod ſint æquales, ſic oſtendo. Ex conſtr. & ex ſcholio p. XIX. l. IX. patet, tribus hiſce numeris 4, 24, 3 quartum eſſe proportionalem 18. Unde permutando 4 eſt ad 3, ut 24 ad 18. Ergo per Theor. II. fracti A, D æquales ſunt. Pari argumento B, & E; C, & F æquales erunt.

Quod etiam ſint in minimis terminis, ſic demonſtro. Ut habeantur fracti ejuſdem nominis, & æquales datis A, B, C, neceſſe eſt, ut denominatores dati 4, 6, 8 adæquatè dividant nominatorem communem futurum: ſic enim proveniunt quotientes, qui ducti in numeratores datos 3, 5, 1 exhibent novos numeratores quæſitos. Atqui per conſtr. nominator ille communis 24 jam inventus eſt minimus, quem nominatores dati 4, 6, 8 adæquatè dividunt. Ergo non poſſunt alii fracti, nominis ejuſdem, datis

A, B,

A, B, C æquales inveniri, in terminis minoribus, quàm reperti jam D, E, F.

PROBLEMA III.

Fractionis reductio ad nomen datum.

F		G
a 2		8 c
b 3	12 d	12 d
	24 e	

DAta ſit fractio F reducenda ad fractionem, cujus nominator ſit d.

Per XIX. l. IX., ut *b* ad *a*, ſic fiat *d* ad alium *c*: quod fit ducendo *a* in *d*, & productum *e* dividendo per *b*. Quotiens enim *c* erit numerator quæſitus, qui cum nominatore dato *d*, dabit fractum G æqualem dato F, ut patet ex Theor. II. cap. præc.

			m p
a 4	8 d	6 n	2 1
b 5		8 d	5 8
	32 e	{ n 2	
		6 —m	
			5

Quod ſi *b* non metiatur *e*, ut contingit in hoc exemplo, ubi *b* dividens *e* dat quotientem *n*, *m*; quotientem integrum *n* ſcribe ſupra denominatorem *d*, erit fractus *n*, *d* + *m*, *p*, (hoc eſt ſex octavæ, cum duabus quintis ex unâ octavâ) æqualis fracto *c*, *b*.

Demonſtratio.

QUoniam, ut *b* eſt ad *a*, ita *d* eſt ad *n*, *m*; manifeſtum eſt, hunc numerum *n*, *m* deſignare quot partes à *d* denominatas, nem-

nempe quot octavas partes, ex toto oporteat accipere, ut fracto *a*, *b* æqualis fractus habeatur nominis *d*. Cum igitur unitates ſingulæ integri numeri *n* deſignent ex toto accipi ſingulas octavas partes; liquet, id, quod in numeratore *n*, *m*, eſt minus unitate, nempe *m*, deſignare ex toto accipi inſuper aliquid minus unâ octavâ parte, videlicet *m*, *p*, id eſt duas quintas ex unâ octavâ, quæ eſt fractio fractionis. Sed de his cap. VIII. plura.

$l\ \frac{7}{8}$

P   1

$\frac{17}{20} + \frac{1q}{2x}$ $\frac{1\ l}{20}$

Hujus reductionis uſus præcipuus eſt, ut valor fractionis datæ cognoſcatur in partibus ejuſdem totius notioribus. Ut ſi offerantur l, *id eſt ſeptem octavæ unius perticæ 20 pedum: reducantur* l *ad vigeſimas, provenient* p + q, x; *hoc eſt pedes 17 cum dimidio, quibus æquivalent* l, *id eſt ſeptem octavæ unius perticæ.*

PROBLEMA IV.

Reductio fracti toto majoris ad integrum.

ESto fractus A toto major. Numerator *b* per denominatorem *c* dividatur. Quotiens *d* æquivalet fracto A.

Do-

Demonſtratio.

A

b 12 ⟍
— (3 d
c 4

FRactus A eſt ad totum, ſeu unitatem pro toto ſuppoſitam, ut numerator *b* ad nominatorem *c* per th. I. cap. præc. Atqui etiam quotiens *d* eſt ad unitatem, ut numerator *b* diviſus ad nominatorem *c*, qui diviſor eſt. Ergo fractus A, & quotiens integer *d* eamdem rationem habent ad unitatem. Ergo per IX. V. æquales ſunt. *Q. E. D.*

B

c 14 { e 2
— 3 —
d 4 4

Quod ſi numeratore per nominatorem diviſo, quotiens ſit integer cum fracto, ut contingit in fractione B; tunc non poterit fractio data reduci tota ad integrum, ſed æquivalebit integro, & fracto ſimul ſumptis. Demonſtratio eadem eſt.

Eâdem ratione reducuntur aſſes ad ſolidos, florenos, pattacones; floreni ad aureos, libras &c.; pedes ad paſſus; pedes, & paſſus ad milliaria, &c. Ut ſi velim 40000 pedum reducere ad milliaria 5000 pedum continentia, divido 40000 per 5000, proveniunt 8 milliaria.

PRO-

PROBLEMA V.

Integri numeri reductio ad fractum nominis dati.

DAtus ſit numerus integer *a*, reducendus ad fractum, cujus nominator ſit *b*. Integer *a* datus multiplicet *b* nomen datum, & producto *c* ſubſcribatur nomen datum *b*, Fractio E inde nata æquivalet integro *a*.

a 7 b 4 E $\frac{28}{4}$ $\frac{c}{b}$

Demonſtratio.

PEr definit. multiplicationis, ut productum *c* eſt ad multiplicatum *b*, ita multiplicans *a* eſt ad unitatem. Sed etiam, ut *c* eſt ad *b*, ita fractus E eſt ad unitatem. Ergo integer *a*, & fractus E eamdem rationem habent ad unitatem; ac proinde æquales ſunt. *Q. E. D.*

Si cuivis integro, ut 8 ſupponatur unitas, fit fractio, vel potius quaſi fractio, æquivalens integro 8.

Hinc in modum ſolidi, floreni, pattacones, aurei reducuntur ad aſſes; aurei, & floreni ad libras, &c.; milliaria ad paſſus, & pedes, &c.; gradus ad minuta prima, & hæc ad ſecunda, & ſic deinceps.

CAP.

CAP. IV.

Additio Fractorum.

Addendus ſit

I.

FRACTUS FRACTO.

$A\ \frac{2}{5}$ $\frac{6}{5}\ B$

$C\ \frac{8}{5}$

$D\ \frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}\ E$

$F\ \frac{14}{35}$ $\frac{15}{35}\ G$

$H\ \frac{29}{35}$

SI ejuſdem ſint nominis, ut A, B, adde numeratores 2, 6, tum ſummæ 8 ſubſcribe nominatorem communem 5. Fractus inde natus C erit ſumma datorum A, & B.

Si diverſi ſint nominis, ut D, E, per Prob. II. C. III. reducantur ad alios ejuſdem nominis F, G. Horum ſumma H æquivalet datis D, E.

II.

INTEGER FRACTO.

$$A \quad 3 \qquad \frac{4}{5} \; B$$

$$C \; \frac{15}{5} \qquad \frac{4}{5}$$

$$D \; \frac{19}{5}$$

INteger A reducatur ad fractum C, dato fracto B cognominem, per Probl. v. Cap. III. Tum additio peragatur, ut numer. I.

III.

PLURES INTEGRI, ET FRACTI.

COlligantur ſeorſim integri in unam ſummam, & ſeorſim fracti in ſummam ſuam, ut num. I. Tum hæ duæ ſummæ addantur, ut num. II.

Demonſtratio horum omnium per ſe eſt manifeſta.

CAP. V.

Subtractio Fractorum.

Subtrahendus ſit

I.

FRACTUS A FRACTO.

$$I\ \frac{2}{5} \qquad \frac{3}{5}\ K \qquad L\ \frac{1}{5}$$

SI ejuſdem ſunt nominis, ut I, & *K*, minor numerator 2 ſubducatur a majori 3, & reſiduo 1 ſubſcribatur communis nominator 5: fractus inde natus L remanet, minore dato I ſubtracto ex dato majori *K*.

$$M\ \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{5}\ N$$
$$O\ \frac{10}{15} \qquad \frac{9}{15}\ P$$
$$\frac{1}{15}\ Q.$$

Si diverſi ſint nominis, ut M, & N; reducantur ad alios O, P nominis ejuſdem, per Prob. II. Cap. III., inter quos ſubtractio peragatur, ut ſupra.

II.

FRACTUS (*S*) UNITATE MINOR AB INTEGRO (*R.*)

EX integro R accipiatur unitas, a qua ſubtrahatur fractio data S; quod fiet, ſi ejus numerator *a* ſubducatur ex numeratore *b*, & reſiduo *c* ſubſcribatur idem nominator *b*. Fractio T inde orta, cum integro unitate mulctato, nempe cum 24, eſt reſiduum quæſitum.

		S		
		15 a		17 b
R	25	—		—
		17		17 b

	2 c
24	—
	17 b
	T

Demonſtratio.

UNitas æquivalet fracto *b*, *b*, ut patet ex corol. 1. Theor. 1. Cap. 1. Ergo cum S ſubtraho ex *b*, *b*, ſubtraho S ab unitate. Atqui, ut patet ex num. II. ſubtraho S ex *b*, *b*, ſi ſubtraham *a* ex *b*. Ergo ſubtraho S ab unitate, dum ſubtraho numeratorem *a* ex numeratore *b*. Reliqua ſunt manifeſta.

III.

III.

FRACTUS UNITATE MAJOR AB INTEGRO, VEL INTEGER A FRACTO.

$X\ 12\frac{18}{4}\ V$

$Y\ \frac{48}{4}\ \frac{18}{4}$

$Z\ \frac{30}{4}$

INteger X per Prob. v. C. III. reducatur ad fractum Y, dato fracto V cognominem. Tum fractus datus V ſubtrahatur ab integro ſic reducto, nempe ab Y, ut numero I.

Pari modo ſubtrahetur numerus integer a fracto, qui integro dato major ſit.

IV.

INTEGER CUM FRACTO EX INTEGRO.

$A\ 6\frac{2}{3}\qquad 16\ B$

$C\ \frac{20}{3}$

INteger cum fracto A per n. II. C. IV. colligatur in unam ſummam C, quæ deinde ſubtrahatur ab integro dato B, ut numero præcedenti.

CAPUT VI.

Multiplicatio Fractorum.

Eſto multiplicandus

I.

FRACTUS PER FRACTUM.

$$A\ \frac{o\;2}{p\;3} \qquad B\ \frac{4\;m}{5\;n} \qquad C\ \frac{8}{15} \qquad C\ \frac{om}{pn}$$

VIdelicet A per B. Numeratores *o*, *m* invicem multiplicati faciant *om*; item nominatores *p*, *n* faciant *pn*. Erit *om* numerator, *pn* verò nominator fractionis C, productæ ex multiplicatione fractionum A, B.

II.

FRACTUS PER INTEGRUM.

$$D\ \frac{k\;2}{m\;3}\ o\ E\ 5\ \frac{5}{1} \qquad F\ \frac{n\;10}{m\;3}$$

NImirum D per E. Integer E multiplicet *k* numeratorem fracti D. Producto *n* ſubſcribe *m* nominatorem fracti D. Erit fractio F inde orta productum quæſitum.

Vel ſic. Integro E ſupponatur unitas, & multiplicatio fiat, ut num. I.

III.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM

INteger, & adhærens fractus colligantur in unam ſummam, per num. II. Cap. IV. Tum multiplicatio fiat, ut num. præcedenti.

Vel ſeorſim multiplica integrum per integrum, ac deinde fractum per integrum.

IV.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM CUM FRACTO.

PEr num. II. Cap. IV. integrum unum, & adhærentem ei fractum collige in unam ſummam. Alterum deinde integrum, & fractum illi adhærentem ſimiliter collige. Tum hæ ſummæ multiplicentur, ut num. I.

Demonſtratio.

pnm omn
o m om
uni. A—B—C—
p n pn

SOla numeri I operatio demonſtranda eſt, reliqua ſiquidem ex illâ patent. Oſtendendum eſt igitur fractum B eſſe ad fractum C, ut unitas eſt ad fractum A. Hoc enim eſt B multiplicatum per A producere C, ut patet ex defin. XIII. VI.

I Duca-

Ducatur *m* in *pn*, productum erit *pnm*. Pari modo *om* ducatur in *n*, productum erit *omn*. Igitur per Theor. VII. Cap. III., B eſt ad C, ut *pnm* eſt ad *onm*. hoc eſt per ſchol. Prop. XVII. lib. VII., ut *p* eſt ad *o*; hoc eſt per Theor. I. Cap. II, ut unitas eſt ad fractum A. *Q. E. D.*

Scholium.

Cum fracti multiplicandi ſinguli minores ſunt unitate, productum utrolibet minus eſt; id quod mirari ſolent Tyrones. Sed res ex definitione multiplicationis illico cernitur.

2 3 6
un.—A—B—C
3 4 12

Cum enim exem. gr. A multiplicans B producit C; unitas eſt ad A, ut B ad C. Sed unitas ponitur major, quàm A. Ergo etiam B major eſt, quam productum C. Quòd ſi A multiplicans B producat C; erit rurſum, ut unitas ad B, ita A ad C. Atqui unitas ponitur major, quàm B: ergo etiam A major eſt, quàm productum C.

Si multiplicandornm unus eſt unitate major; tunc productum erit hoc minus, ſed altero majus.

CAP. VII.

Diviſio Fractorum .

Dividendus ſit

I.

FRACTUS PER FRACTUM .

$$\overset{A}{\frac{a6}{c8}} \text{ per } \overset{B}{\frac{m2}{n4}} \left\{ \overset{C}{\frac{o3}{p2}} \right.$$

Nimirum A per B. Si diviſoris B termini *m*, & *n* metiantur dividendi A terminos *a*, & *c*: numeri *o*, & *p*, per quos metiuntur, conſtituent fractum C quotientem quæſitum.

$$\overset{A}{\frac{a4}{c9}} \text{ per } \overset{B}{\frac{m3}{n5}} \qquad \overset{E}{\frac{n5}{m3}}$$

$$D \left\{ \frac{an\ 20}{cm\ 27} \right.$$

Si verò diviſoris B termini non metiantur terminos dividendi A; diviſorem B inverte, & fiat E, perque eum ſic inverſum multiplica dividendum A. Productum D erit quotiens quæſitus.

II.

II.

FRACTUS PER INTEGRUM, SEU INTEGER PER FRACTUM.

$\frac{2}{3}$ per $\frac{6}{1}$ ⟨ $\frac{2}{18}$

INtegro ſupponatur unitas, & diviſio fiat, ut num. I.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM, VEL PER INTEGRUM CUM FRACTO.

REdigantur utrimque ad unam ſummam per num. II. Cap. IV. Tum inter utramque ſummam peragatur diviſio, ut num. I.

IV.

INTEGER MAGNUS CUM FRACTO PER INTEGRUM.

EXempli gratiâ 598 cum fracto A per 3. Commodiùs ſic operabere. Integer 598 per 3 dividatur, & quotiens ſit 199. Si quid ſuperſit, ut hìc 1, id addatur fracto A, per num. II. Cap. IV., ut habeatur ſumma B, quam divide per 3, ut num. II. Quotientem C appone quotienti integro

A

598 $\frac{2}{3}$ per 3

$\frac{5}{3}$ B $\frac{5}{9}$ C (199 $\frac{5}{9}$ C

tegro priori; eritque 199 cum C quotiens quæſitus.

Demonſtratio.

$$\overset{A}{\frac{a}{c}} \text{ per } \overset{B}{\frac{m}{n}} \left\{ \frac{o}{p} \right. C$$

SOla operatio num. 1. demonſtranda eſt, reliquæ enim ex hac ſunt manifeſtæ. Metiantur primò *m*, & *n* ipſos *a*, & *c* per *o*, & *p*. Quoniam ergo *m* metitur *a* ex ſuppoſitione per *o*; *m* in *o* producet *a* per axio. VIII. lib. VII. Rurſum quoniam *n* metitur *c* per *p*; *n* in *p* gignet *c*. Ergo per demonſtrationem Cap. præced. fractus B, multiplicans fractum C, producit fractum A. Ergo per defin. multip. unitas eſt ad B, ut C eſt ad A. defi. 13.7.
Igitur permutando, unitas eſt ad C, ut diviſor B eſt ad dividendum A. Ergo per defin. diviſ. def. 14.
C eſt quotiens diviſionis A per B.

$$F\ \frac{mna}{mnc} \qquad mn$$

$$\overset{A}{\frac{a}{c}} \text{ per } \overset{B\ E}{\frac{m\ \ n}{n\ \ m}} \qquad D \left(\frac{an}{cm} \right.$$

At cum termini diviſoris B non metiuntur terminos dividendi A, tum admirabilior operatio videri ſolet, quod diviſio per multiplicationem peragatur. Demonſtrandum eſt igitur, ſi A multiplicetur per diviſorem B inverſum, hoc eſt per E, productum D fore ipſum quotientem diviſionis A per B.

Termini diviſoris *m*, *n* in ſe mutuò ducti faciant *mn*. Tum *mn* in *a*, & *c* producat *mna*, & *mnc*,

mnc, ex quibus fiat fractus F. Per ſchol. p. XVII. l. VII. *mna* eſt ad *mnc*, ut *a* eſt ad *c*. Ergo per theor. II. Cap. II. F, & A æquales ſunt. Atqui numerator *m* diviſoris B, dividens *mna* dat quotientem *na*, (quemadmodum enim multiplicatio ſpecioſa perficitur ſolâ litterarum appoſitione, ita diviſio ſolâ earumdem ſubtractione abſolvitur) & nominator *n* ejuſdem B diviſoris, dividens *mnc*, quotientem dat *cm*. Ergo per I. partem fractus B dividet fractum F, per quotientem D fractum. Quare cum oſtenderim, fractos F, & A æquales eſſe; etiam B dividet A per quotientem D, natum videlicet ex multiplicatione ipſius A per diviſorem B inverſum, hoc eſt per E. *Q. E. D.*

Scholium.

Mirari ſolent etiam hìc Arithmetices imperiti, in fractorum diviſione, quotientem reperiri plerumque majorem numero ipſo, qui dividitur: quod ſemper accidit, cum diviſor eſt unitate minor. Verùm ex definitione ipſá diviſionis ratio eſt manifeſta. A diviſum per B, quotientem exhibeat C. Ergo per defin. diviſ. unitas eſt ad quotientem C, ut diviſor B eſt ad diviſum A. Igitur permutando, ut unitas eſt ad diviſorem B, ita quotiens C eſt ad diviſum A. Atqui ponitur unitas major eſſe diviſore B. Ergo etiam quotiens C major eſt diviſo A.

$$A\,\frac{5}{4}\ \text{per}\ \frac{2}{3}\,B\left\{\overset{C}{\frac{15}{8}}\right.\ 1$$

CAP.

CAP. VIII.

De Fractis Fractorum.

QUemadmodum, integris in partes ſectis, fracti numeri oriuntur; ita ex partibus integrorum in alias minores partes ſubdiviſis habentur fracti fractorum: ut ſi ſummam A ex B, hoc eſt 3 quartas ex 16 vigeſimis unius floreni. Scribuntur, ut vides in exemplis hic appoſitis A, B ſunt 3 quartæ ex 16 vigeſimis. C, D ſunt 2 quintæ ex unâ ſextâ. E, F, G ſunt 2 quintæ unius ſextæ ex 3 ſeptimis.

A	B	C	D	E	F	G
3	16	2	1	2	1	3
4	20	5	6	5	6	7

Compendii gratiâ, fractio fractionis appellari poterit fractio ſecunda: fractio fractionis fractionis dicatur fractio tertia.

Ut verò circa fractiones fractionum Logiſticæ operationes inſtituantur, reducendæ prius erunt ad ſimplices.

Reductio Fractionis ſecundæ ad ſimplicem.

DAta ſit fractio ſecunda B, D. Numeratores *a*, & *p* in ſe invicem ducti faciant *ap*, & nominatores *c*, *n* faciant *cn*. Fractus E æquivalet fractioni ſecundæ B, D.

B	D
2a	p3
3c	n4

Z

E $\frac{ap\ 6}{on\ 12}$

De-

Demonſtratio.

FIat, ut *p* ad *n*, ita *c* ad *z*. Manifeſtum eſt, fractionis ſecundæ B, D, totum eſſe D, ac proinde fractionem ſecundam B, D eſſe ad ſuum totum D, ut eſt numerator *a* ad nominatorem *c*. Sed per theor. 1. Cap. II. fractus ſimplex D eſt ad unitatem, ut *p* ad *n*: hoc eſt per conſt. ut *c* ad z. Ergo ex æquo fractio ſecunda B, D eſt ad uuitatem, ut *a* ad z. Deinde, quia per conſtr. ut *p* eſt ad *n*, ita *c* eſt ad z, erit per XIX. l. VII. *pz*, factum ex *p* in z, æquale *cn*, facto ex *c* in *n*. Quoniam igitur *p* multiplicans *a* facit *ap*, & *p* multiplicans z facit *cn*, erit per XVII. l. VII. ut *a* ad z. ita *ap* ad *cn*. Sed ut *a* eſt ad z, ita, quod jam oſtendi, fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem; & ut *ap* eſt ad *cn*, ita per the. 1. Cap. III. fractus E eſt ad unitatem. Ergo per XI. l. V. fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem, ut fractus E eſt ad unitatem. Ergo per IX. l. V. fractio ſecunda B, D, & ſimplex E æquales ſunt. *Q. E. D.*

Reductio fractionis tertiæ, quartæ &c. ad ſimplicem

DAta ſit fractio tertia C, D, E reducenda ad ſimplicem. Fractio ſecunda D, E reducatur ad ſimplicem I. Igitur jam C eſt fractio fractionis I. Rurſum igitur fractio ſecunda

C	D	E
$\frac{3\ a}{5\ b}$	$\frac{n\ 4}{p\ 6}$	$\frac{x\ 5}{z\ 7}$
G $\frac{anx}{bpz}$		$\frac{nx}{pz}$ I

C, I reducatur ad ſimplicem G. Erit hæc æqualis datæ fractioni tertiæ C, D, E, ut ex conſtructione ipsâ patet.

Operatio tota abſolvitur hunc in modum: numeratores in ſe invicem ducti *a*, *n*, *x* faciant *anx*; nominatores verò *b*, *p*, *z* gignant *bpz*. Fractio G inde nata quæſitum exhibet.

CAP. IX.

Fracti Decimales.

LOgiſtica fractorum numerorum, cujus tam, praxim, quàm theoriam jam expoſuimus; quamvis ſcitu & neceſſaria, nec injucunda ſit; tamen in calculo longiori, & ſæpius repetendo, quantum faceſſat negotii, ſciunt omnes, qui numeros tractant. Verùm quemadmodùm dividendi labor per Neperi laminas Rabdologicas, & Logarithmos prope omnis evanuit; ita moleſtiis fractorum Simonis Stevinii præclaro invento liberati ſumus. Is enim docuit, loco fractionum vulgarium decimales adhibere, quas inſigni compendio ita prorſus tractare liceat, ac ſi integri eſſent numeri. Hoc verò inventum ſuum Auctor nec ſatis exactè, ac planè expoſuit, nec demonſtravit: neque enim, cum demonſtrare ſe dicit, aliud agit, quàm exemplum afferre. Utrumque ſupplere conabimur.

Quid ſint, & quomodo ſcribantur.

FRactiones, ſeu numeri decimales totius cujuſpiam partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ &c. denominatæ videlicet a numeris progreſſionis decuplæ, ab 1 incipientis, 10, 100, 1000 &c: quæ quidem more communi ita ſcriberentur, ut *a*, id eſt tres decimæ: ut *b*, id eſt ſeptem centeſimæ. Sed quia horum fractorum nominatores non aliis notis conſtant, quàm unitate, & cifris; expeditior calculus redditur, ſi non infra nominatores, ſed ſupra ipſos, ut fit in ſcrupulis Aſtronomicis, exprimantur ſignis quibuſdam, quæ hìc vides expreſſa.

$\frac{3}{10}$ a

$\frac{7}{100}$ b

Decimæ. Centeſimæ. Milleſimæ. Decimilleſ. Centimill. &c.

Signa.	I	II	III	IV	V	&c.
Valor.	10	100	1000	10000	100000	

I	II	III	IV	V	VI
3	4	6	2	9	4
a	b	c	d	e	f

Igitur Decimalium *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* hic valor eſt: *a*, tres decimæ: *b*, quatuor centeſimæ: *c*, ſex milleſimæ: *d*, duæ decimilleſimæ: *e*, novem centimilleſimæ: *f*, quatuor millioneſimæ. Quod ſi notis ſignatis aliæ non ſignatæ ad ſiniſtram adhæreant, ut *g*, *b*, integros illæ numeros deſignant.

Cum

	I	II	III
8	3	2	1
g	h	k	l

Cum igitur fractio decimalis exprimenda eſt, duo ſcribuntur, numerus, & ſignum. Numerus ſignificat, quot partes decimales ex toto accipiantur; ſignum, quales.

Finis Decimalium.

FSt, omnes operationes Arithmeticas, ad uſum humanæ vitæ pertinentes, ſinè fractis abſolvere.

Modus utendi exponetur infra Cap. XV.

CAPUT X.

Requiſita quædam ad demonſtrationem Arithmeticæ decimalis.

SI methodicè procedatur, facilis reddetur operationum decimalium demonſtratio.

Definitiones.

I	II	III
2	3	4
a	b	c

I. Notæ, ſignis affectæ, non æſtimantur ex loco, hoc eſt juxta loci valorem, ſed ut ſimplices, hoc eſt, ac ſi ſingulæ primo ſtarent loco. Itaque ſi dentur decimales notæ, *a*, *b*, *c*, licet *a* tertio loco conſiſtat, decimas ſignificat, non 200, ſed duas: ſimiliter 3, licet exiſtat loco ſecundo, centeſimas ſignificat, non 30, ſed tres.

		I	II
4	8	2	9
p	q	a	b

II. Integri verò numeri, qui decimalibus adhærent, eodem valore ſunt æſtimandi, quo, ſi decimales abeſſent, æſtimarentur. Sic notæ *p*, *q*, licet præcedant eas notæ decimales, *a*, *b*, valent quadraginta octo, non verò 4800.

II
6 6 n
e —
100 m

III. Cum nota decimalis ſcribitur modo conſueto fractionum vulgarium, denominator præter unitatem habet tot cifras, quot indicantur a ſigno. Sic nota decimalis *e*, vulgari modo ſcripta, eſt fractio *n*, *m*, cujus nominator *m* habet duas cifras, tot nimirum, quot a ſigno deſignantur.

III
K 3
1000

IV. Valor ſigni decimalis eſt unitas cum tot cifris, quot indicantur a ſigno; ut ſi detur numerus decimalis *k*, valor ſigni eſt 1000.

Patet ex defin. III.

Axioma.

B	I	II	III
23	0	0	0
I	II	III	IV
57	0	0	0
B		C	

Si numero cuicumq; B, ſive is ſit purè integer, ſive ex integro, & particulis decimalibus compoſitus, adjiciantur cifræ C, ſignis decimalibus affectæ, ejus valorem illæ non immutabunt. Nam neque cifræ ipſæ ullum ex ſe valorem habent, neque integro B præpoſitæ ejus locum attollunt, ut patet ex defin. II. Axioma illuſtrabitur infra.

Pari

	I			IV
A	43			5
	I	II	III	IV
	43	0	0	5

Pari modo cum ſeries decimalis A interrupta eſt, ſi ea per cifras interpoſitas continuetur, valor dati A non immutatur.

THEOREMA I.

Particulæ decimales a, b, c, d *æquivalent fractioni* O, *cujus numerator ſint ipſæ notæ datæ* a, b, c, d, *ſignis abjectis, & juxta loci valorem æſtimatæ; nominator verò ipſe maximi ſigni valor, hoc eſt unitas cum tot cifris, quot a ſigno maximo* IV *indicantur*.

Demonſtratio.

Decimales numeri *d*, *c*, *b*, *a* ſcribantur explicitè, hoc eſt, fiant fracti E, F, G, H, quorum numeratores ſint ipſæ notæ ſimpliciter acceptæ, nominatores verò ſint valores

I	II	III	IV
7	2	3	4
a	b	c	d

$\frac{7234}{10000}$ O

$\frac{4}{10000}$ E $\qquad \frac{4}{10000}$ I

$\frac{3}{1000}$ F $\qquad \frac{30}{10000}$ K

$\frac{2}{100}$ G $\qquad \frac{200}{10000}$ L

$\frac{7}{10}$ H $\qquad \frac{7000}{10000}$ M

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30 \\ 200 \\ 7000 \\ \hline 7234 \end{array}$$

ipſi ſignorum. Fiant deinde alii fracti I, K, L, M, quorum numeratores ſint eædem notæ, ſed ſecundum loci valorem æſtimatæ; nominator verò communis ſit valor ipſe ſigni maximi. Oſtendam, fractos I, K, L, M æquales eſſe fractis E, F, G, H. Comparemus duos L, & G. Quoniam locorum valor ſecundum progreſſionem decuplam procedit a dextrâ in ſiniſtram; valor autem ſignorum decimalium eâ-

I	II	III	IV
7	2	3	4
a	b	c	d

$\frac{7234}{10000}$ O

$\frac{4}{10000}$ E $\frac{4}{10000}$ I

$\frac{3}{1000}$ F $\frac{30}{10000}$ K

$\frac{2}{100}$ G $\frac{200}{10000}$ L

$\frac{7}{10}$ H $\frac{7000}{10000}$ M

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30 \\ 200 \\ 7000 \\ \hline 7234 \end{array}$$

dem progreſſione decuplâ procedit a ſiniſtrâ in dextram: manifeſtum eſt, quod valor notæ *b* ex

ex loco æſtimatæ, numerator videlicet 200 fractionis L, ita excedat valorem ſimplicem ejuſdem notæ *b*, hoc eſt numeratorem fractionis G, ut valor ſigni maximi IV, ipſe videlicet fractionis L nominator, excedit valorem ſigni II, quo ſignata eſt nota *b*, hoc eſt ipſum nominatorem fracti G. Ergo per Theor. II. Cap. II. fracti L, & G æquales ſunt. Simili planè argumento I, & E; K, & F; M, & H æquales erunt. Atqui fractiones I, K, L, M conficiunt fractionem O, quia 10000 valor ſigni maximi IV eſt communis earum denominator; numeratores verò earum collecti faciunt 7234, ut per ſe patet. Ergo etiam fracti E, F, G, H, hoc eſt decimales dati *d*, *c*, *b*, *a*, conficiunt fractionem O. *Q. E. D.*

THEOREMA II.

SI integro numero m, n *adhærent decimales particulæ* a, b, c; *integer cum decimalibus æqualis erit fracto* P, *cujus numerator ſint omnes notæ datæ* m, n, a, b, c, *ſignis ubi adſunt abjectis, & juxta loci valorem acceptæ; nominator verò ipſe maximi* III *ſigni valor* 1000.

Demonſtratio.

			I	II	III
	3	2	5	4	9
	m	n	a	b	c

f	32000	549	d
e	1000	1000	e

PEr Theor. I. decimales *a*, *b*, *c* ſunt æquales fracto *d*, *e*. Quod ſi integro *m*, *n* ducto in *e* fiat *f*, & ſubſcribatur *e*, ut fiat fractus *f*, *e*; erit is par

549	
32000	32549 h
32549	1000 e
	P

par integro *m*, *n* per Prob. V. Cap. III. Sed fracti *f e*, & *d e* conficiunt fractum P. Cum enim nominator *e* ſit communis, ſoli numeratores *f*, *d* ſunt addendi, quorum ſumma neceſſariò ſemper conſtat notis datis *m*, *n*, *a*, *b*, *c*, ut patet vel leviter rem expendenti. Ergo etiam integer *m*, *n* cum decimalibus *a*, *b*, *c* conficiunt fractum P. *Q. E. D.*

THEOREMA III.

I IV	II V
2 2 3	a 5 2 7 5
I II III IV	I II III IV V
c 2 0 0 3	c 5 2 0 7 0 0 5
2 0 0 3 e	5 2 0 7 0 0 5 e
1 0 0 0 0 d	1 0 0 0 0 0 d

CUm decimalis progreſſio a *interrupta eſt; tunc cifris interpoſitis interruptio progreſſionis tollitur, ut fiat* c; *& ſignis abjectis, infra* e *ſcribatur* d, *maximi* IV *ſigni valor. Fractio* e, d *erit æqualis* a.

Demonſtratio eadem eſt, quæ in I. & II. Theoremate.

Corol-

Corollarium.

EX his amplius declarabitur axioma ſupra poſitum. Eſto *d*, cui adjiciantur tres cifræ ſignis notatæ, ut fiat *f*: per Theor. II. æquatur fracto *g*, *h* : *f* verò fracto *k*, *m* per idem Theor. Quot verò cifris *k* excedit *g*, totidem quoque cifris neceſſariò *m* excedit *h*. Ergo per theor. I. Cap. III. lib. I. *k* eſt ad *g*, ut *m* ad

	I			I	II	III	IV
d	35	f	3	5	0	0	0

g	35	*k*	35000
h	10	m	10000

h: & permutando *k* eſt ad *m*, ut *g* ad *h*. Ergo per Theor. II. Cap. II. lib. II fracti *k*, *m*, & *g*, *h* æquales ſunt. Quare cum *k*, *m* ſit *f*, & *g*, *h* ſit *d*; etiam *d*, & *f* æquales ſunt.

Eſt quidem id per ſe manifeſtum: unde & tanquam axioma propoſui. Viſum eſt nihilominus, quia maximus hujus axiomatis uſus erit, declaratiunculam iſtam apponere.

C A P. XI.

Additio Decimalis.

ADdendi offerantur A, B, C. Ubi ſignorum progreſſio vel interrumpitur, ut in C, vel deficit, ut in B, ea aut cifris interpoſitis, ut in F, aut cifris adjectis, ut in E, continuetur. Qua quidem ſuppletione valor ipſius

C, aut

	I II III IV	I II III IV
	A 3 5 2 4 7 1	D. 3 5 2 4 7 1
	B 8 6 1	I II III IV
		E 8 6 1 0 0 0 0
	II IV	I II III IV
	C 7 4 9	F . . 7 0 4 0 9
		I II III IV
		G 9 0 3 2 8 8 0

$$I\ \frac{352471}{10000\ p} \qquad K\ \frac{8610000}{10000\ p} \qquad L\ \frac{70409}{10000\ p}$$

$$N\ \frac{9032880\ g}{10000\ p}$$

C, aut B non immutatur. Tunc ſimilia ſcribantur ſub ſimilibus, eo ordine, quem vides in D, E, F. Peragatur deinde additio, ac ſi omnes eſſent numeri integri. Summæ G notas primas iiſdem ſignis affice, eritque hæc ſumma quæſita.

Demonſtratio.

PEr Theoremata ſuperiori capite demonſtrata D, E, F æquantur fractis I, *K*, L, quorum numeratores ſunt ipſi D, E, F abjectis ſignis accepti ut integri; nominator verò communis *p*, maximi ſigni valor. Sed ut horum fractorum habeatur ſumma, tantùm opus eſt

addere

addere numeratores, hoc eſt ipſos D, E, F, tanquam integros, & ſummæ ſubſcribere nominatorem communem *p*. Ergo etiam, ut habeatur ſumma datorum D, E, F, tantùm opus eſt, ipſos D, E, F acceptos velut integros addère, & ſummæ *g* ſubſcribere *p*, maximi ſigni valorem, ut ſumma habeatur fractio N. Sed fractio N per Theoremata Cap. præc. æqualis eſt ſummæ G: nam ejus numerator conſtat iiſdem notis, quibus C; & nominator *p* eſt ipſe maximi ſigni IV valor, per hyp. utrobique. Ergo G eſt ſumma quæſita datorum D, E, F, ſeu A, B, C. *Q. E. D.*

Quamvis interruptio ſignorum in praxi vix unquam, aut rarò offeratur, nihilominus, ut plena habeatur cognitio Logiſticæ decimalis, etiam hunc caſum tum hìc, tum deinceps proponere, ac demonſtrare voluimus.

CAPUT XII.

Subtractio Decimalis.

A $9\,8\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{2}$ C $9\,8\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{2}\,\overset{III}{0}\,\overset{IV}{0}\,\overset{V}{0}$

B $4\,\overset{II}{5}\,\overset{III}{9}\,\overset{V}{4}$ D $4\,\overset{I}{0}\,\overset{II}{5}\,\overset{III}{9}\,\overset{IV}{0}\,\overset{V}{4}$

Q $9\,4\,\overset{I}{3}\,\overset{II}{6}\,\overset{III}{0}\,\overset{IV}{9}\,\overset{V}{6}$

E $\dfrac{9842000}{100000\,p}$ F $\dfrac{405904}{100000\,p}$

Opor-

$$T \frac{9436096\ q}{100000\ p}$$

OPorteat ſubtrahere B ex A. Integer minor ſubſcribatur majori, ut ſolet. Tum decimales ſimiles ſub ſimilibus collocentur, & loca ſignis vacantia, tam in principio, ut in A, quàm in medio, ut in B, cifris ſignatis ſuppleantur, ut factum vides in C, & D. Qua

			I	II					I	II	III	IV	V
A	9	8	4	2	C	9	8	4	2	0	0	0
		II	III	V					I	II	III	IV	V
B	4	5	9	4	D		4	0	5	9	0	4
									I	II	III	IV	V
					Q	9	4	3	6	0	9	6

$$E \frac{9842000}{100000\ p} \qquad F \frac{405904}{100000\ p}$$

$$T \frac{9436096\ q}{100000\ p}$$

quidem ſuppletione datorum A, & B valor non immutatur, per axioma. Subducatur deinde D ex C, perinde ac ſi ambo toti eſſent numeri integri, ſeu abſoluti. Reſidui verò Q

primæ

primæ notæ iiſdem ſignis afficiantur. Erit hoc reſiduum quæſitum.

Demonſtratio.

PEr Theoremata Cap. X. C, & D æquantur fractis E, & F, quorum numeratores ſunt ipſi C, & D, accepti ut integri, nominator verò communis *p*, ipſe valor ſigni communis maximi. Ut autem F ſubtrahatur ab E, tantùm opus eſt numeratorem a numeratore ſubtrahere, hoc eſt D, tanquam integrum, à C tanquam integro, & reſiduo ſubſcribere communem nominatorem *p*, maximi nempe ſigni valorem. Ergo ut D ſubtrahatur à C, hoc eſt per axioma, B ex A, etiam tantùm opus erit D, tanquam integrum, ſubducere à C, tanquam integro; & reſiduo ſubſcribere *p* maximi ſigni valorem, ut habeatur reſiduum fractus T. Sed fractus T per Theorema II. æquatur Q: nam per hypotheſim, & numerator *q* iiſdem conſtat notis, quibus Q, & nominator *p* eſt valor ſigni maximi. Ergo etiam fractus T eſt reſiduum quæſitum. *Q. E. D.*

CAPUT XIII.

Multiplicatio Decimalis.

DEtur multiplicandus A per B. Nullâ ſignorum habitâ ratione, ita multiplicatio inſtitua-

ſtituatur, ac ſi A, & B eſſent integri numeri, ſublatâ prius per cifras interpoſitas (ut in A

I III			
7 4	A	G	H
I II III		704	52
7 0 4	A	——	——
I		1000 e	10 p
5 2	B		
——		36608 k	
I II III IV		——	
3 6 6 0 8	C	10000 f	
		N	

ſecundo) progreſſionis decimalis interruptione, ſi quæ eſſet. Maxima deinde datorum A, B numerorum ſigna ſibi adde. Eorum quippe ſumma dabit IV ſignum maximum, quo producti C nota prima ſignari debeat, indicabitque pariter, quot notæ ſignis ordine decreſcentibus ſint afficiendæ.

Demonſtratio.

PEr Theoremata Cap. X. A, & B æquantur fractis G, & H, quorum numeratores ſunt ipſi A, & B accepti tanquam integri, nominatores verò ipſi valores maximorum ſignorum A, & B. Atqui, ut hi fracti G, & H inter ſe multiplicentur, tantùm opus eſt, ut numeratores eorum, hoc eſt A, & B, accepti tanquam integri, ſe invicem multiplicantes, no-

vum

vum faciant numeratorem *k* (ipſum nempe C, ſignis abjectis) cui deinde ſubſcribatur nominator *f*, conſtans unitate, & cifris, *e*, *p* ſimul ſumptis, valor ſcilicet utriuſque ſigni maximi A, B. Ergo etiam, ut decimales A, & B invicem multiplicentur, tantùm opus eſt, ut A, & B accepti tanquam integri ſe invicem multiplicantes faciant numeratorem *k*, cui ſubſcribatur nominator *f*, ipſe nimirum valor utriuſque ſimul maximi ſigni A, B, ut habeatur productum fractio N. Atqui per Theor. II. Cap. X. N æqualis eſt C: nam & numerator *k* iiſdem conſtat notis, quibus C, & nominator *f* conſtat unitate, & cifris *e*, *p*, hoc eſt per hyp. tot cifris, quot deſignantur ab utriſque ſimul maximis ſignis A, B; hoc eſt per conſt. tot cifris, quot indicantur a ſigno maximo C. Ergo etiam C eſt productum quæſitum ex multiplicatione datorum A, & B. *Q. E. D.*

Si datorum unus eſt numerus integer, cui nulli adhæreant decimales, producti nota prima ſignabitur ſigno maximo alterius dati, & reliquæ ſignis ordine decreſcentibus.

CAPUT XIV.

Diviſio Decimalis.

I IV V
A 2 5 8 7 9

I II III IV V
A 2 5 8 0 0 7 9

B 5 7 3 (with I II above 7 3)

III IV V
X 4 3 3

I II III
(4 5 0 2 C

$D \frac{2580079}{100000}$ P $\frac{573}{1000}$ q, f   E   g

$Z \frac{433}{100000}$

$N \frac{4502}{1000}$ h, *k*

OPorteat A dividere per B. Primò progreſſionis decimalis interruptio, ſi quæ ſit cifris interpoſitis tollatur, ut in A ſecundo. Divide deinde A per B, perinde ac ſi ambo eſſent integri. Si jam diviſoris B ſignum maximum minus eſt ſigno maximo dividendi A, ab hoc illud aufer: ſigno reſiduo III notabitur nota prima quotientis C, reliquæ verò ſignis ordine decreſcentibus.

Quod

I II III IV   I II
k 2 3 0 0 0 m 5 6
I   I II
h 2 3   n (4 1 0

Quod ſi *m* diviſoris maximum ſignum majus ſit ſigno maximo *b* dividendi, aliquot cifris dividendo adjectis (ut in *k*), ſigna, quæ deſunt, ſuppleantur, donec ſubductio fieri poſſit.

I II
p 8 2 5
I
q 9 4 2

Idem fiat, cum diviſor *q* eſt abſolutè major dividendo *p*, quomodocumque ſigna ſe habeant.

Demonſtratio.

PEr Theor. II. Cap. X. dati A, & B æquantur fractis D, & E, quorum numeratores *p*, & *q* ſunt ipſi A, & B, accepti tanquam integri; nominatores verò *f*, *g*, valores ipſi maximorum ſignorum v, & II. Atqui, ut D dividatur per E, oportet ſolummodò *p* dividere per *q*, hoc eſt A tanquam integrum per B tamquam integrum, & *f* dividere per *g*, quod fit auferendo cifras *g* à cifris *f*, hoc eſt ſignum maximum dati B à ſigno maximo dati A. Ergo etiam, ut A dividatur per B, oportet ſolum A, acceptum ut integrum, dividere per B ut integrum, & quotienti *b* ſubſcribere unitatem cum cifris, quæ reſtant cifris *g* ablatis a cifris *f*, ut ſic habeatur pro quotiente fractio N. Sed per Theor. II. Cap. X fractio N æqualis eſt C; nam & numerator *b* iiſdem conſtat notis, quibus C, nati enim ſunt ex eorumdem numerorum diviſione, & nominator *k*, ut mox

oſtendam, eſt valor maximi ſigni ipſius C. Ergo C eſt quotiens ortus ex diviſione A per B. *Q. E. D.*

Quod autem *k* ſit valor maximi ſigni quotientis C, ſic oſtendo. Per conſtr. ſignum maximum G eſt id, quod remanſit ſigno maximo ipſius B ablato a ſigno maximo ipſius A. Atqui *g*, & *f* ſunt valores maximorum ſignorum A & B; ac proinde per defin. IV. totidem conſtant cifris, quot indicantur a ſignis maximis ipſorum A, & B. Manifeſtum eſt igitur, cifris *g* ablatis ex cifris *f*, remanere *k* valorem ſigni maximi quotientis G.

In altero caſu, quo cifræ dividendo *b* ſunt adjiciendæ, ut fiat *k*, ſic demonſtrabimus. Per I. partem jam demonſtratam *m* dividat *k*, & producat quotientem *n*: *k* æquatur *b* per axioma. Atqui *m* dividens *k* fecit quotientem *n*. Ergo etiam *m* dividens *b* gignet quotientem *n*. *Q. E. D.*

Porro ex conſtructione jam traditâ patet, cum diviſor eſt integer, quotientem iiſdem ſignis notari, quibus dividendus: item cum diviſoris, & dividendi ſigna maxima æqualia ſunt, quotientem eſſe integrum totum.

II. Si diviſione peractâ aliquid ſuperfuit, ut in exemp. 1. ſuperfuit X; ejus notæ iiſdem ſignis ſunt notandæ, quibus totidem primæ notæ dividendi A.

Demonſtratio.

Nam A eſt D, & B eſt E: E verò dividens D relinquit Z, hoc eſt X per Theor. I. Cap.

I. Cap. 10. Clara ſunt iſta, ſi prior demonſtratio fuerit intellecta.

		I	II	III	IV	V		I	II			
A	2	5.	8	0	0	7	9 B	5.	7	3		

	III	IV	V	VI	VII	VIII	I	II	III	IV	V	VI
X	4	3	3	0	0	0	4.	5	02	7	5	5
				t				C			r	

	VI	VII	VIII
V.	3	5	5

III. Si reſiduum diviſionis adhuc alicujus momenti ſit, adjiciantur ei aliquot cifræ decimales, & diviſio continuetur, ut num. I. traditum eſt.

Ex diviſione A per B ſuperfuit X. Hoc ſi placuerit ulteriùs exhaurire, adjice aliquot cifras ſignatas; ut fiat X *t*: quod divide, ut num. I; & quotientem inde natum *r* adſcribe quotienti C; erit C *r* quotiens ex diviſione A per B. Tum V, quod ſupererit, jam multo erit minus priori reſiduo X, ſeu Z, ut patet ex num. præced., & hoc ipſum pluribus adjectis cifris, aut penitus evaneſcet, aut certè fiet quovis dato minus.

Demonſtratio.

QUoniam valor reſidui X, adjectis cifris *t*, non immutatur, X *t* æquivalebit ſoli X. Atqui X *t* diviſo per B, provenit quotiens *r*. Ergo etiam X diviſo per B, proveniet quotiens *r*. Atqui ex A minùs X diviſo per B provenit quotiens C: nam A diviſo per B ſuperfuit

X . Ergo ex A toto diviſo per B provenit quo
tiens C *r* .

Praxim paucis ſic complector .

AD reſiduum ex diviſione decimali adjecti
aliquot cifris, diviſionem proſequere, &
notas quotienti primo accedentes nota ſigni
ordine creſcentibus .

Corollaria .

I. EOdem planè artificio poterit evaneſcer
reſiduum ex diviſione integri per inte-
grum ; eademque erit demonſtratio .

II. Quævis fractio eodem artificio reduce
tur ad partes decimas . Detur fractio *a* , *b*

3 a		I	II	III	
——	f 3	0	0	0	
7 b					
		I	II	III	
	d (	4	2	8	

Numeratori *a* ali-
quot cifras adjice
eumque ſic auctum
divide per nomi-
natorem *b* , ut tra-
ditur num. I. Quo-
tiens *d* æquivale
fractioni *a* , *b* .

Nam quia per axioma *a* , & *f* æquales ſunt
etiam *b* illos dividens , quotientes æquales da
bit . Atqui *b* , dividens *a* , dat in quotiente fra
ctionem *a* , *b* per corollar. II. Theor. I. Cap. I.
dividens autem *f* , dat *d* . Æquatur ergo fracti
a , *b* ipſi *d*.

Reductio fractionis datæ etiam continetu
Probl. III. Cap. III.

CAP.

CAP. XV.

Uſus Decimalium numerorum.

I. MEnſuræ, & pondera dividantur in 10 partes æquales: & ſingulæ decimæ rurſum in alias æquales 10, quæ jam erunt centeſimæ totius: atque harum ſingulæ iterum in 10, quæ proinde jam erunt milleſimæ totius. Menſuris hunc in modum diviſis ſi utamur in dimenſione quacumque linearum, planorum, ſolidorum, liquidorum, ponderum, &c., nuſquam calculo fractiones ſeſe ingerent; ſed earum loco integris numeris adhærebunt particulæ decimales, quas licebit tractare, ut integros numeros; quemadmodum per plura jam capita explicavimus.

B	C
I II III	14 | 560
7 2 8	—
	20
$\frac{728}{1000}$ A	$\frac{14}{20}$

Quod ſi ſub finem totius operationis lubeat decimales particulas reducere ad fractionem denominationis datæ, exempli gr. ſi lubeat cognoſcere, particulæ B, unius virgæ 20 pedum, quot pedes ejuſdem virgæ conficiant, quæſitum facillimè obtinebitur hunc in modum. Denominator datus 20 multiplicans 728 faciat 14560, a quo aufer tot primas notas 560, quot indicantur a ſigno maximo decimali, ſive quot ſunt dati decimales. Reſiduum 14 eſt numerator quæſitus. Igitur

particulæ B efficiunt unius virgæ 20 pedum partes C, nempe quatuordecim vigeſimas, hoc eſt, faciunt pedes 14.

Demonſtratio.

FRactio A, cujus numerator iiſdem notis conſtat, quibus B, denominator verò præter unitatem habet tot cifras, quot deſignantur a ſigno maximo ipſius B, per Theor. I. Cap. X. æquatur B. Sed per Prob. III. Cap. III., ut fractio A reducatur ad denominationem 20, numerator 728 ducendus eſt in 20, & productum 14560 dividendum per denominatorem 1000, quod fit auferendo tot primas notas, quot ſunt cifræ in 1000, hoc eſt, quot indicantur a ſigno maximo ipſius A. Liquet ergo veritas operationis præſcriptæ.

II. Circumferentia circuli dividatur quidem in partes, ſeu gradus 360; at gradus ſinguli non in 60, ſed in 10 æquales partes ſecentur. Tum ſingulæ decimæ unius gradus in alias 10, quæ jam erunt unius gradus centeſimæ. Hæ rurſum ſingulæ in 10, quæ jam erunt unius gradus milleſimæ; & ſic deinceps. Quod utinam Aſtronomis placuiſſet, aut certè deinceps placeret; profectò longè expeditior evaderet calculus, toties hoc in ſtudio adhibendus.

III. Plerumque expediet, juxta I. Coroll. ſuperius, cujuſcumque diviſionis reſiduum decimalibus cifris adjectis exhaurire, aut fractiones integris jam adhærentes in decimales convertere, ut Coroll. II. traditur, quando multæ cum fractis illis erunt operationes inſtituendæ: ſi una, alterave tantum, vix operæ pretium fuerit reductionem tentare.

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ
LIBER III.
De Radicum Extractione.

PRæcipuum Arithmeticæ Practicæ problema eſt radicis ex poteſtate datâ Extractio. Poteſtas autem eſt numerus ex alicujus numeri ſæpius poſiti, ſive ex æqualium numerorum multiplicatione procreatus. Radix eſt ipſe numerus, qui multiplicatus poteſtatem genuit. Unaquæque verò poteſtas tot dicitur habere dimenſiones, quot habet latera, ſive quot æquales numeri ad ejus geneſim requiruntur. Quadratus numerus appellatur, qui producitur ex quovis numero in ſe ipſum ducto, ſive ex multiplicatione duorum æqualium. Talis eſt 4, qui fit ex 2 per 2: & 9. qui fit ex 3 in 3: & 16, qui fit ex 4 in 4 &c.

Cubus dicitur, qui fit ex trium numerorum æqualium multiplicatione, ſive ex numero bis in ſe ducto, Talis eſt 8, qui fit ex 2, 2, 2: nam 2 in 2 facit 4; & 4 in 2 eſt 8.

Biquadratus, ſeu quadrato quadratus eſt, qui fit ex multiplicatione quatuor æqualium numerorum, ſive ex numero in ſe ipſum ter ducto. Talis eſt 16, qui fit ex 2, 2, 2, 2; nam 2 in 2 eſt 4; & 4 in 2 eſt 8; & 8 in 2 eſt 16.

Superſolidus eſt, qui fit ex multiplicatione

5 æqualium numerorum, ſeu ex numero in ſe quater ducto. Atque hunc in modum reliquæ in infinitum poteſtates procreantur. Lege ſcholium noſtrum P. VIII. l. IX., in quo cætera huc necaſſariò pertinentia reperies.

Poteſtatis verò cujuſque radix ab ipſa poteſtate denominatur. Hinc radix quadrata, radix cubica, quadratoquadrata, ſuperſolida, &c. Singularum characteres, ſeu ſigna hìc adjungo.

R. vel latus

R. 2) radix quadrata.

R. 3) radix cubica.

R. 4) radix biquadrata.

R. 5) radix ſuperſolida.

Et ſic in infinitum.

Exempla nonnulla ſùbjicio.

R. 12) vel R 2) 12, eſt radix quadrata numeri 12.

R 3) 25, eſt radix cubica numeri 25; & ſic deinceps in aliis.

Porro expediet plurimum huic negotio radicum eliciendarum, geneſim poteſtatum etiam exprimere multiplicatione ſpecioſâ, quæ ſolâ litterarum appoſitione peragitur. Conſule,

Radix	a	
Quadrat.	aa	
Cubus.	aaa	
Quad: quadr.	aaaa	
Surſolid.	aaaaa	

le, quæ monui ante lib. VII. Eucl. *a* in *a* facit *aa* quadratum; & *aa* in *a* facit cubum *aaa*; & *aaa* in *a* facit quadratoquadratum *aaaa*.

Et ſic deinceps.

CAPUT I.

Radicis Quadratæ Extractio.

Extrahenda ſit radix quadrata ex numero A.

```
A  56, 70, 09  (753
   49           14
    7, 70
    7  25      150
    ------
      45, 09
      45, 09
      ------
         0
```

I. POſt binas quaſque notas, a dextris ſumpto initio, comma, aut punctum interpone; eritque numerus datus in membra ſectus, binis notis conſtantia, præter ultimum, quod unicâ conſtare poteſt. Quot verò erunt membra, tot notis conſtabit radix quæſita.

II. Præſidio tabellæ hìc appoſitæ, qua notarum ſimplicium quadrati continentur, quære poſtremi membri 56 radicem quadratam, aut ſi (quod hìc contingit) quadratus non ſit, radicem quadrati proximè minoris; ut quia ulti-

mum

mum membrum 56. quadratus non eſt, quære quadratum proximè minorem 49, ejuſque radicem 7 ſcribe poſt lunulam. Erit hæc nota ultima radicis quæſitæ. Quadratum verò 49 aufer ex membro 56, & reſiduum 7 ſcribe infra lineam. Hæc operatio ſingularis eſt, neque amplius repetitur.

Rad.	Quad.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

III. Reſiduo 7 adſcribe membrum penultimum 70, ut habeatur novum membrum totale 7, 70. Tum radix hactenus acquiſita 7 duplicetur. Ea ſic duplicata 14 diviſor appellabitur.

Quære quoties diviſor 14 contineatur in membro novo 7, 70, demptâ notâ primâ, nimirum in 77. Reperies contineri quinquies. Scribe ergo 5 poſt lunulam. Erit hæc nota radicalis altera.

Multiplicet deinde nota radicalis, jam reperta 5, diviſorem 14, & fiat 70; eademque ſe ipſam multiplicans faciat quadratum 25. Hæc duo producta collige in unam ſummam, numeris ita collocatis, ut vides in hâc formulâ. Summam 725 aufer ex membro 7, 70, & reſiduum 45 ſcribe infra lineam.

$$\begin{array}{r} 70 \\ 25 \\ \hline 725 \end{array}$$

Poterit etiam multiplicatio inſtitui hunc in modum. Diviſori 14 appone notam radicalem 5, ut fiat 145, quæ per ipſam radicalem notam 5 multiplica. Idem oriri productum, quod priùs, patet ex P. III. lib. II.

IV. Hæc operatio in omnibus membris ſequentibus eodem prorſus modo repetitur.

Reſi-

Reſiduo 45 adſcribe membrum antecedens 09, ut habeatur totale novum 45, 09. Tum radicem hactenus acquiſitam 75 duplica, ut fiat diviſor novus 150. Quære quoties hìc contineatur in membro 45, 09, demptâ primâ notâ, nimirum in 450. Reperies ter. Scribe ergo notam 3 poſt lunulam. Hæc deinde diviſorem 150 multiplicans, faciat 450; multiplicans verò ſeipſam, faciat 9. Hæc duo producta adde, numeris, ut in adjectâ hìc formulâ, collocatis. Summam 4509 aufer ex membro 45,09, & quia nihil remanet, erit A numerus quadratus, ejuſque radix 753.

450
9
4509

Quod ſi poſt ultimam ſubtractionem aliquid remanet, numerus, qui proponitur, quadratus non eſt: quadratus autem fit, ſi mulctetur reſiduo.

V. Quando factâ multiplicatione nequit fieri ſubtractio radicalis; nota ultimò reperta, per quam nimirum facta eſt multiplicatio, minuenda eſt, donec ſubtractio fieri poſſit.

Eſto radix elicienda ex 784. Quadratum proximè minus ultimo membro 7 eſt 4, & radix ejus 2, ſcribenda poſt lunulam. Ejus quadratum 4 aufer ex membro 7, & reſtant 3, quæ ſubſcribe, adjecto membro 84. Radicalis 2 duplicata dat diviſorem 4, qui in novo membro 3, 84, demptâ primâ notâ, hoc eſt in 38, continetur novies. Scribe ergo 9 poſt lunulam. 9 in 4 facit 36. 9 in 9 facit 81. Hæc producta adde numeris

7, 84	(298
4	4
3, 84	
3 84	
0	

ris collocatis, ut in hac formulâ. Summa 441 auferri nequit ex membro 3, 84. Rejectis igitur 9 ſubſtitue 8, & denuo multiplica. 8 in 4 facit 32. 8 in 8 facit 64. Summa eſt 384, quæ auferri poteſt.

36
8 1
—
4 4 1

VI. Quando diviſor in membro primâ notâ mulctato ne ſemel quidem continetur; ſcribatur cifra poſt lunulam, & membro illi nimis parvo membrum proximum adjiciatur.

Eſto radix eliciendæ ex C. Ex membro primo 4 elicitur nota radicalis 2, cujus quadrato 4 ablato a membro 4 remanet o, cui adſcripto proximo membro 15, fit membrum novum o, 15, ſeu 15. In hoc primâ notâ 5 mulctato, nempe in 1, nota radicalis 2 duplicata, nempe 4, ne ſemel quidem continetur. Scribe igitur o poſt lunulam, & membro 15 nimis parvo adjice 16 membrum antecedens. Tum per omnia, ut priùs, operaberis, radicem videlicet hactenus acquiſitam 20 duplicabis, &c.

C 4, 15, 16 (20
4 4
—
o, 15
15, 16

VII. Quando membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, ſcribenda eſt unitas poſt lunulam, & ſubtrahenda ex membro.

C A P. II.

Radicis Quadratæ Demonſtratio.

NEminem hucuſque legi, qui extractionis radicum quadratæ, ac cubicæ demonſtratio-

ſtrationem perſpicuam, & integram exhiberet. Appellant quidem fere omnes Prop. IV. l. II. Elem. Sed difficultas tota in applicatione conſiſtit, quam vel omittunt, vel tam imperfectè exequuntur, ut pleraque extractionis myſteria in tenebris relinquant. Res interim eſt ſcitu digna inprimis, quæque ſubtilitatis habeat non parum; ejuſmodi tamen, ut ex iis, quæ hoc, & IV. capite allaturi ſumus, clarè intelligi poſſe exiſtimem.

PORISMA I.

NUllus quadratus numerus in principio cifras habet impares.

Demonſtratio.

RAdix quæcumque quadratum generans, vel cifras habet in principio, vel non habet. Si habet, quemadmodum A, manifeſtum eſt, ut A ducatur in A, ſolas notas ſignificativas in ſe invicem duci, & producto præponi cifras duplo plures, quàm ſint in A radice. Ergo productum, hoc eſt, ut patet ex def. XXVIII. lib. VII., ipſe quadratus B pares habet in principio cifras.

A	230	
A	230	
	52900	B

Si non habet cifras in principio, ut C; tum ut C ducatur in C, debet prima nota 9, quæ jam ponitur non cifra eſſe, ſed nota ſignificativa, duci in ſeipſam, ut habeatur ejus quadratum, cujus prima nota

C	439	
C	439	
	192721	D

nota in primo loco producti D ſcribenda eſt. Atqui nullius notæ ſimplicis quadratum primam notam habet cifram, ut patet ex tabella Cap. præced. Ergo neque quadrati D, qui pro cujuſvis radicis compoſitæ quadrato ſupponitur, nota prima erit cifra. Omnis igitur quadratus numerus, aut pares habet in principio cifras, aut ejus prima nota omnino cifra non eſt. *Q. E. D.*

Corollarium.

Simili ratione ex ipſo opere multiplicationis manifeſtum eſt, nullius quadrati numeri primam notam eſſe 2, vel 3, vel 7, vel 8, ſed unam ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0. Nam prima cujusvis quadrati nota prima eadem eſt cum alicujus quadrati ſimplicis notâ primâ, quæ neceſſariò eſt una ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0.

PORISMA II.

P	a	b	c
	56,	30,	09
	d		e
	49		00, 00
			k
	7		0 0
	7,		0 0
	f,		k

Esto numerus quicumque P, *a dextrâ in ſiniſtram in membra, ſeu partes* a, b, c *diſtinctus, commate poſt binas quaſque notas interpoſito. Aſſumatur autem quodlibet membrum, exemp. gr. ultimum* a, *& quadratus in eo ſimpliciter accepto deliteſcens ſit* d, *ejuſque radix* f. *Dico, ſi ante* d *ponantur tot cifrarum binarii, quot ante membrum* a *membra antecedunt; ante* f *radicem verò to-*

ties

ties una cifra : d, e *fore quadratum latentem in membro* d, *juxta valorem loci accepto*, & *radicem ejus eſſe* f, K.

Demonſtratio.

CUm enim pro ſingulis membris ante *f* poſita ſit una cifra, ante *d* verò cifrarum binarius; manifeſtum eſt, cifras *e* eſſe duplo plures cifris *k*. Ergo *k*, *f* radix in ſe ducta faciet *d*, e; nam ut *f*, *k* ducatur in *f*, *k*, tantum opus eſt *f* ducere in *f*, unde fit *d* ex hypotheſi, & cifras *k*, *k* ſibi mutuò apponere, quæ conflabunt cifras *e*, cum duplæ ſint ipſarum *k*. Ergo *d*, *e* quadratus eſt, ejuſque radix *f*, *k*. Liquet ergo quæſitum.

Corollaria.

HInc patet I. in quolibet membro latere quadratum, & talem quidem, qualis in lemmate determinatur.

Patet II. cur numerus, ex quo quadrata radix elicienda eſt, ſecetur in membra binis notis conſtantia; & cur poſtremum membrum poſſit unic eſſe nota, quæ quidem ex ſequentibus patebunt adhuc clariùs.

PORISMA III.

QUadratum binomii a + b, *ſive numeri in duas partes ſecti*, *eſt* aa + aab + bb. *Hoc eſt quadratus ex* a, & *planus ex* a *in* b *bis ſumptus*, & *quadratus ex* b.

Pa-

Patet ex Prop. IV. l. II. Id ipſum cernitur e opere ipſo multiplicationis ſpecioſæ, cujus pa radigma appono.

	a b	a b	
a+b	20+3	2 3	20
a+b	20+3		3
aa+ab	400+60		
+ab+bb	+60+9		

Sum. aa+2ab+bb=400+120+9.

Porro hæc multiplicatio nihil habet difficu tatis; nam ut *a+b* ducatur in *a+b*, prima multiplicans totum *a+b*, producit *aa+ab* Deinde +*b* multiplicans idem totum *a+b* producit +*ab*+*bb*. Hæc duo producta addit faciunt *aa*+2 *ab*+*bb*. Quæ omnia per ſ manifeſta ſunt.

PORISMA IV.

Sto numerus Z, quotcumque conſtans pa tibus, ex. gr. tribus, a+b+c. *Ej quadratum eſt* aa+2ab+bb+2ac+2bc+c *hoc eſt quadratum ex* a, *planus bis ex* a *in* b *quadratum ex b; planus bis ex* a+b *in* c; *qua dratum ex* c.

De-

Demonſtratio.

a, b, c	a. 200.	a + b + c
2 3 5	b. 30.	200 + 30 + 5
Z	c. 5.	

PEr Poriſma præcedens quadratum ex $a + b + c$ æquatur quadrato ex $a + b$, per modum unius partis accepto, & bis facto ex $a + b$ in c, & quadrato ex c. Atqui quadratum ex $a + b$, per idem Poriſma, eſt quadratum ex a, unà cum bis facto ex a in b, unà cum quadrato ex b. Ergo quadratum ex $a + b + c$ æquatur quadrato ex a, bis facto ex a in b, quadrato ex b, bis facto ex $a + b$ in c, quadrato ex c. *Q. E. D.*

Corollarium.

QUadratum igitur numeri in ſuas partes dirempti componunt partium quadrati, & dicti plani.

PORISMA V.

A	B
56, 70, 09	(753
A	B
1, 82, 25, 00	(1350

QUadratus eſto quivis A, *ejuſque radix* B. *Sit autem quadratus* A *ſectus in membra, binis notis conſtantia, a dextrâ in ſiniſtram. Dico, radicem* B *tot conſtare notis, quòt ſunt membra in quadrato* A.

Demonſtratio.

PEr Poriſma II., ejuſque Coroll. quoniam in ſingulis membris dati A latet unus quadratus; patet, tot eſſe membra in A, quot in A latent quadrati. Sed quia per Poriſma III., & IV., ejuſque Coroll. in quadrato toto A ſingularum notarum radicalium quadrati continentur; tot etiam notas continebit radix B, quot in A ſunt quadrati. Ergo radix B tot continebit notas, quot ſunt membra in A. *Q. E. D.*

PORISMA VI.

ESto numerus quadratus quicumque Z, *ejuſque radix quadrata* X. *Secetur autem* Z *in membra* h, g, f, e, *à dextrâ in ſiniſtram, poſt binas quaſque notas commate interpoſito*.

Z e f g h 55, 33, 87, 21	{ abcd 7439 X
e 55, 00, 00, 00	a. 7000
f 6, 33, 00, 00	b. 400
g 57, 87, 00	c. 30
	d. 9
h 1338, 21.	a + b + c + d 7000 + 400 + 30 + 9

In ultimo membro *e* latet quadratus ſolus ultimi radicis ſegmenti *a*. In penultimo membro *f*, unà cum reſiduo 6 membri ultimi *e*, latet quadratus penultimi radicis ſegmenti *b*, unà

unà cum bis facto ex a in b. In antepenultimo membro g, unà cum reſiduo 57 membri f, latet quadratus antepenultimi radicis ſegmenti c, unà cum bis facto ex $a+b$, hoc eſt ex a, & b in c. In membro b, unà cum reſiduo 1338 membri g, latet quadratus radicis ſegmenti d, unà cum bis facto ex $a+b+c$, hoc eſt ex a cum b, & c, in d. Et ſic deinceps, ſi plura ſint membra.

Z	e f g h 55, 33, 87, 21	{ abcd 7439	X

e 55, 00, 00, 00	a. 7000
f 6, 33, 00, 00	b. 400
g 57, 87, 00	c. 30 d. 9
h 1338, 21.	a + b + c + d 7000 + 400 + 30 + 9

Demonſtratio.

Cum enim per Poriſ. V. tot notis conſtet radix X, quot ſunt membra in Z, in ſingulis autem membris, ut patet ex Poriſ. III. & IV., ejuſque Corol. lateat quadratus unius ſegmenti radicis; manifeſtum eſt, ſegmenti radicis ultimi a, ac proinde maximi quadratum contineri in membro ultimo, adeoque & maximo e, & ſic deinceps. Ex quo etiam per eadem III., & IV. Poriſ. patet de planis, ſive bis factis ex &c. Conſtat ergo quæſitum.

HIS PRÆMISSIS

EOrum omnium, quæ ad radicis quadrat
extractionem præcedentiCapite præſcript
ſunt, ratio dabitur. Reſumatur exemplum Cap
præced., in quo ex numero A extracta e
radix Z.

I. Quia per Poriſ. VI. in ultimo membro
latet quadratus ſegmenti radicis ultimi; idcirc
elicitur ex membro *e* radix quadrata, quàn
poteſt maxima, reponiturque poſt lunulam
quadratus verò illius a membro *e* ſubtrahitur
& reſiduum ſcribitur infra lineam. Et quia pe
VI. Poriſ. in membro ultimo continetur qua
dratus ſolus ſegmenti, ſeu partis ultimæ radi
cis, in reliquis verò membris, præter quadra
ta partium radicalium, continentur etiam nu
meri rectanguli, ſeu plani; idcirco hæc opera
tio prima ſoli poſtremo membro convenit. In
ſuper, quod ex membro *e* elicita ſit radix *a*
neglecto loci valore, nimirum ac ſi eſſet tan
tum 56, cum reverà ſit 56, 00, 00, id, quen
admodum in aliis pleriſque operationibus arit
meticis, compendii gratiâ factum eſt.

A e f g {abc Z
56,70,09 {753
49 . . . .
h 7,70, . . a 700 14. 00. m
7 25, . . b 50
——— c 3
K 45,09
45,09.

II. Quod verò interim nota radicalis *a*, f
inven-

inventa, ſit legitima, ſic oſtendo. Cum per V. Poriſ. radix tota Z tot conſtet notis, quot totus A membris, patet ante membrum *e* tot eſſe membra, quot ante *a* ſunt notæ. Quia igitur ſingula membra *f*, *g* duabus conſtant notis, tot ante *e* membrum præcedunt notarum, ſive locorum binarii, quot ante *a* præcedunt notæ, ſeu loca. Quare cum nota *a* ſimpliciter accepta per conſtr. ſit radix quadrati latentis in membro *e* 56 ſimpliciter accepto, erit quoque per Poriſma II. *a* accepta juxta loci valorem (nempe 700) radix quadrati latentis in membro æſtimato ex loci valore nempe in 56, 00, 00. Hoc ipſum in reliquis membris eodem prorſus modo demonſtrabitur.

III. Ex membris penultimo, cæteriſque, quotquot fuerint, notæ radicales reliquæ eliciuntur artificio a priori planè diverſo. Ad illius rationem penitus perſpiciendam juvabit non parum ob oculos ponere radicis binomiæ $a+b$ quadratum, quod per Poriſma IV. eſt

$$aa+2ab+bb.$$

Hujus poſtrema pars aa indicat, in ultimo membro *e* latere quadratum ultimi radicis ſegmenti, ſeu notæ *a*: reliquæ vero partes $2ab+bb$ indicant, quid contineatur in membro penultimo *f* cum prioris *e* reſiduo, aliiſque ſingulis. Quia igitur in membro *f* cum reſiduo prioris, hoc eſt in *b* (7, 70, ſeu 770, 00) continetur $2ab+bb$, hoc eſt planus bis genitus ex ultimo radicis ſegmento, ſeu nota *a* jam cognita, in *b* adhuc incognitam, unà cum quadrato ipſius *b*, ut patet ex Lem. VI., manifeſtum eſt,

incognitam radicis notam *b* ex hoc membro *b* eſſe eliciendam; utique per diviſionem, quæ ſola reſolvit, quod multiplicatio compoſuit. Cum verò latera membrum *b* producentia ſint *a*, & *b*, in diviſorem illud erit aſſumendum quod cognitum jam eſt, nempe *a*, & quidem duplicatum, eo quod in membro *h* contineatur planus bis factus ex *a* in *b*, hoc eſt planus ex *a* bis ſumpto in *b*. Atque hæc cauſa eſt, cur ad conſtituendum diviſorem radix eatenus acquiſita duplicetur.

```
        e  f  g    ⎧abc   Z
A.    56,70,09    ⎩753
      49 . . . .
      ——
      h7 ,70 . .              a.  700
       7  27 . .              b.   50
      ——                      c.    3
       K 45 , 09
         45 , 09     a  +  b  +  c
                   700 + 50 +  3
```

IV. Per hunc autem diviſorem 2*a* (14) dividitur non totum membrum *b* (7, 70) ſed demptâ notâ primâ, nimirum 77 tantum, hac de cauſâ. Ut innoteſcat nota incognita *b*, ſolus planus 2*ab*, factus nimirum ex *a* bis in *b*, dividendus eſt; cum ad hoc nihil faciat *bb*, utpote totus incognitus. Nihil autem plani 2*ab* ad primum membri *b* locum pertinet, ut infra demonſtrabitur num. VI.

V. Reperta jam porro per diviſionem nota incognita *b* multiplicat & duplum notæ prioris *a*, ipſum nempe diviſorem 2*a* (14), & ſeipſam, ut habeantur duo producta 2*ab* + *bb* (70, & 25;

& 25), quæ in membro *b* continentur, & ab eodem idcirco ſubtrahuntur. Quorſum verò fiat hæc ſubtractio, patebit ex clauſulâ totius demonſtrationis.

VI. Cur autem producta ex multiplicatione ſcribantur, ut in appoſitâ formulâ, ratio eſt, quod 70, hoc eſt 2 *ab*, fiat ex diviſore 2 *a* in *b*; & 25, hoc eſt *bb*, fiat ex *b* in *b*.

$$\begin{array}{r} 70\ldots \\ 25\ldots \\ \hline 725\ldots \end{array}$$

Unde cum *a* ſit nota radicis uno loco altior, quàm *b*, etiam producti 2 *ab* (70) prima nota, ut patet ex Poriſ. VI. C. III. l. I. uno loco altior erit, quàm prima nota producti 25 ex *b* in *b*, ideoque ſcribenda ſupra 2 ſecundam notam quadrati *bb* 25. Ex quo etiam manifeſtum fit, id quod ſupra aſſumptum fuit, videlicet nihil plani 2 *ab*, hoc eſt 70, pertinere ad locum primum membri *b*. Nam cum duo illa producta adduntur, quadrati *bb* (25) prima nota reponitur in primo loco ſummæ 725, plani verò 2 *ab* (70) prima nota pertinet ad locum ſummæ ſecundum. Et quia ſumma 725 tot conſtat notis, quot membrum *b*, utpote per Poriſma VI. in eo latens, adeoque ab illo ſubtrahenda; manifeſtum eſt, plani 2 *ab* (70) primam notam pertinere ad locum membri *b* ſecundum; ac proinde, cum ſolus planus 2 *ab* (70) dividendus ſit, membrum *b* demptâ primâ notâ dividitur.

Porro valorem verum productorum exprimit hæc formula altera, quem inter operandum citra veritatis præjudicium diſſimulari, liquet ex demonſtratis ſupra.

$$\begin{array}{r} 70000 \\ 2500 \\ \hline 72500 \end{array}$$

VII. At quare hæc operatio in aliis deinceps

 ceps

ceps membris ſemper eadem repetitur? Ratio patet ex VI. Poriſmate. Quemadmodum enim in membro *b*, compoſito ex *f*, & reſiduo prioris, latet $2ab+bb$, hoc eſt planus bis ex notâ radicali *a* in radicalem *b*, unà cum quadrato ipſius *b*; ita in membro *k*, compoſito ex *g*. & 45 prioris *f* reſiduo, latet $2ac+abc+cc$, hoc eſt planus bis ex $a+b$ radice eatenus acquiſitâ ductâ in *c*, & quadratum ipſius *c*: & ſic deinceps in reliquis membris, ſi quæ eſſent plura.

VIII. Poſtremò quæritur, quare, cum membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, pro radicali notâ ſcribatur unitas. Eſto quadratus A, cujus membrum ultimum eſt *b*, 3, 00, 00; radix autem ſit Z, cujus membrum ultimum ſit unitas.

b	Z
3, 96, 01	199.
A	100.

Quia radix Z tot habet notas, per Poriſm. V., quot A membra; habebit 1 ante ſe tot cifras, quot ante ultimum *b* ſunt membra. Sed quot ſunt membra ante *b*, tot ante notam 3 ſunt cifrarum binarii, ut habeatur ejus valor 3, 00, 00. Ergo, ut habeatur valor ultimæ notæ ipſius Z, quæ eſt 1, ante eam tot ponendæ ſunt cifræ, quot ante 3 cifrarum binarii; ac proinde ante 3 ſunt cifræ duplo plures, quam ante 1. Ergo quadratum ipſius unitatis, ex valore loci æſtimatæ, erit 1 cum tot cifris, quot ſunt ante 3. Ergo continetur in 3, 00, 00, ab eoque auferri debet. Ex quo patet quæſitum.

IX. Explicatis hunc in modum, ac demonſtratis ſingulis partibus extractionis quadraticæ, demonſtratio tota ſic concluditur.

Nu-

Numerus datus A æqualis eſt quadrato ex a; plano ex a bis in b; quadrato ex b; plano ex $a + b$ bis in c; quadrato ex c, ut patet ex toto opere extractionis, cum dictæ quantitates ſubtractæ fuerint ex A, nec quidquam ſubtractione ultimâ peractâ ſuperfuerit. Atqui, per Poriſ. IV. etiam quadratus radicis Z iiſdem æqualis eſt. Ergo A eſt ipſe quadratus radicis Z. *Q. E. D.*

	e	f	g		
A	56,	70,	09	{ abc 753	Z
		a	700		
		b	50		
		c	3		

Quod ſi ultimâ ſubtractione peractâ ſuperfuiſſet quidpiam, tunc numerus datus, illo reſiduo mulctatus, fuiſſet æqualis dictis quantitatibus ac proinde, & radicis inventæ quadratus.

C A P. I I I.

Radicis cubicæ extractio.

Extrahenda ſit radix cubica ex numero A.

A	102, 503, 302	(4
	64	
	38	

I. Poſt ternas quaſque notas, initio facto a dextris, comma aut punctum interpone; eritque numerus datus A ſectus in partes, ſeu membra ternis notis conſtantia, præter ultimum, quod conſtare poteſt notis, vel duabus, ut in C; vel etiam unicâ, ut in D.

39, 820, 439. C

7, 900, 341. D

Tot

Tot verò notis conſtabit radix quæſita, quo
erunt numeri dati membra, ut infra demon-
ſtrabitur.

Rad.	Qua.	Cubi
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

II. Præſidio tabellæ hi
appoſitæ, qua notarun
ſimplicium cubi continen
tur, quære poſtremi mem
bri radicem cubicam, au
ſi id cubus non eſt, quære
radicem cubi proximè mi
noris.

Ut, quia hic poſtremum membrum 10
cubus non eſt, quære cubum proximè minoren
64. Hujus radicem 4 ſcribe poſt lunulam
quæ erit nota ultima radicis quæſitæ; cubun
verò ipſum 64 aufer a poſtremo membro
& reſiduum 38 infra lineam repone. Hæc ope
ratio ſoli poſtremo membro convenit, ac pro
inde in membris ſequentibus non reperitur.

III. Reſiduo 38 adſcribe membrum penultimum 503, ut fiat membrum totale novum 38, 503: pro quo diviſor ſic parabitur.

A

102, 503, 232 (4
64

38, 503
33, 336

5, 167

Radicis hactenus acquiſitæ 4 quadratum 1
triplica: fit 48. Tum ipſam quoque radicem
hactenus acquiſitam triplica: fit 12. Produ
cta

cta adde, numeris collocatis, ut in hac formulâ. Summa 492 erit diviſor.

Quære igitur, quoties diviſor 492 contineatur in membro 38, 503, demptâ primâ notâ, hoc eſt in 3850. Reperies contineri ſexies. Scribe ergo 6 poſt lunulam, quæ erit nota penultima radicis quæſitæ.

48
12
492

Tum nota radicalis ultimò reperta 6, multiplicans primò radicis prioris 4 quadratum ter ſumptum, nempe 48, faciat 288. Deinde radicis ultimò repertæ quadratum 36, multiplicans triplum radicis prioris 4, nempe 12, faciat 432. Denique 6, ſeipſam cubicè multiplicans, faciat 216.

Hæc tria producta adde, numeris collocatis, ut in hac formulâ. Summam 33336 aufer a membro 38, 503, & reſiduum 5167 infra lineam repone.

288
432
216

IV. Hæc operatio, tota jam numero tertio expoſita, in omnibus membris ſequentibus eodem modo, atque ordine repetitur.

Itaque reſiduo 5167. adſcribe membrum proximum 232, ut habeatur membrum novum totale 5167, 232. Radicis 46, hactenus acquiſitæ, quadratum 2116 triplica: fit 6348. Radicem quoque ipſam 46 triplica: fit 138. Hæc duo producta in unam ſummam collige, numeris, ut in hac formulâ, collocatis. Summa eſt novus

6348
138
63618

vus diviſor. Quære igitur, quoties hic contineatur in novo membro 5167, 232, demptâ primâ notâ, nempe in 5167, 23. Reperies contineri octies. Scribe ergo 8 poſt lunulam. Erit hæc nota prima radicis quæſitæ. 8 in 6348, triplum nempe quadrati radicis prius acquiſitæ 46, facit 50784: quadratum ex 8, nimirum 64, in 138, triplum radicis prioris 46, facit 8832. 8 in 8 cubicè eſt 512. Hæc tria producta adde, numeris, ut in appoſitâ formulâ, ordinatis. Summam 5167232 aufer ex membro 5167232, & nihil reſtat.

```
        A
102,503,232(468
 64
 —
 38,503
 33 336
 ——————
  5,167,232
  5,167,232.
 ——————————
          o
```

```
50784
 8832
  512
—————
5167232
```

Numerus ergo A cubus eſt, ejuſque radix 468. Quod ſi poſt ultimam ſubtractionem aliquid ſuperſit; numerus, qui proponitur, non erit cubus: fit autem cubus, ſi mulctetur reſiduo.

V. Quæ num. V. VI. VII. Cap. I. notantur pro quadratæ radicis extractione, etiam in extractione radicis cubicæ erunt obſervunda.

C A P. I V.

Cubicæ radicis demonſtratio.

PRæmitto etiam hic Potiſmata quædam, e[x] quibus Theoria tota extractionis cubicæ fiet manifeſta. PO-

PORISMA I.

Cubus numerus, aut nullas in principio habet cifras, aut ſi habeat, eas ternarius metitur.

Demonſtratio.

Nam radix quæcumque, cubum generans, vel habet in principio cifras unam, aut plures, vel non habet. Si non habet, tum, ut A, (ſic eam lubet vocare) multiplicetur cubicè, debet prima ejus nota in ſe duci cubicè, & cubi producti prima nota ſcribi infra lineam primo loco in producto quæſito, ſive cubo totius radicis A, ac proinde cujuſcumque cubi prima nota convenit cum primâ notâ alicujus cubi ſimplicis. Atqui nullius cubi ſimplicis prima nota eſt o. Ergo &c. Quod ſi radix in principio habeat cifras, quemadmodum B, ex ipſo multiplicationis opere manifeſtum eſt, ut B ducatur in ſe cubicè, tantùm opus eſſe, ut cubo notarum ſignificantium præponantur cifræ triplo plures, quàm ſint in principio radicis B. Ergo, &c.

	239
A	

B	580
C	195112000

Corollarium.

Ex demonſtratis patet, cujusvis cubi primam notam convenire cum primâ notâ alicujus cubi ſimplicis.

PO-

PORISMA II.

Eſto cubus quicumque a, *ejuſque radix cubica* c. *Cubo autem tot præponantur cifrarum terniones* b, *quot cifræ* d *radici*. *Dico etiam totum* c, d *eſſe radicem cubicam totius* a, b.

a		b	
64	1	000 ,	000
c		d	
4	1	00	

Demonſtratio.

UT habeatur cubus ex *c*, *d* tantum opus eſt *c* multiplicare cubicè, & producto *a* præponere cifras triplo plures, quàm ſint *d*. Atqui cifræ *b* ſunt triplo plures per hypotheſim. Ergo *a*, *b* eſt cubus ex *c d*.

Corollaria.

I. HInc patet, ſi numerus quivis ſit diviſus in membra, tribus notis conſtantia, dempto ultimo *a*, quod pauciorjbus conſtare poteſt, & membri cujuſpiam puta *a*, ſimpliciter accepti, radix cubica ſit *c*: ſi ante radicem *c* ponantur tot cifræ *d*, quot ante *a* ſunt membra *e*, *k*, ſeu locorum terniones *b*, etiam *c*, *d* fore radicem cubicam ipſius *a*, *b*, ſeu membri *a* juxta loci valorem accepti.

a		e		k
64 ,		230 ,		789
a		b		
64 ,	1	000 ,		000
c		d		
4	1	00		

II. Ex his manifeſtum eſt, in quolibet membro

bro latere cubum, & talem quidem, qualem jam determinavimus.

III. Atque ex his jam incipit apparere, cur ad extrahendam radicem cubicam, poſt ternas quaſque notas comma interponatur, & cur non interſit, ſive membrum ultimum unicâ conſtet notâ, ſive duabus.

PORISMA III.

Cubus binomii a + b *hoc eſt lineæ, ſeu numeri in duas partes ſecti, eſt*

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb.$$

Hoc eſt, cubus binomii a + b *æquatur cubo ex* a; *ſolido ter ſumpto, quod fit ex quadrato ipſius* a *ducto in* b; *ſolido ter ſumpto, quod fit ex quadrato ipſius* b *ducto in* a; *cubo ex* b.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab + bb \\ \quad\quad ab \\ \hline a + b \\ \hline aaa + aab + abb + bbb \\ \quad\quad\quad aab \quad abb \\ \quad\quad\quad aab \quad abb \end{array}$$

hoc eſt; $aaa + 3aab + 3abb + bbb$.

De-

Demonſtratio.

PAtet ex ipſo actu multiplicationis cubicæ cujus paradigma hìc apponitur, & per ſ eſt manifeſta.

Id ipſum demonſtratur in ſchemate hìc ad junćto. Cubus enim *d b* rectæ *c d*, ſectæ i duas partes *a*, & *b*, complectitur cubos ſeg mentorum *a*, & *b*, cubos nimirum *c e n o f q p*, & *o s 3 m 2 5 1 u*: item tria parallepiped æqualia, quorum baſes ſunt quadrata *po*, *ro*, æqualia quadrato *rp* ſeu *aa*, altitudines ver *px*, *b*, ſeu *rd*, *ek*, quæ omnes ſunt æquale ipſi *b*: item tria parallepipeda æqualia, quorum baſes ſunt quadrata o1, o2, o3, æqualia qua drato *yy* ſeu *bb*, altitudines verò 57, 58, 3 æqualia ipſi *a*.

Hæc quidem, utpote vel mediocriter Ele menta Geometriæ callentibus ſatis nota, no eſt neceſſe pluribus demonſtrare.

PORISMA IV.

ESto numerus Z *diremptus in partes ſuas quotcumque illæ fuerint*, a+b+c. *Eju cubus æquatur his quantitatibus: cubo ex* a *ſolido ter geni to ex quadrat ipſius* a *in* b *ſolido ter geni to ex quadrat*

a b c
925 a 900 a+b+c
Z b 20 900+20+5
c 5

ipſius b *ducto in* a; *cubo ex* b; (*omnes ba quantitates vocabo* M) *item ſolido ter genit ex quadrato ipſius* a+b *ducto in* c; *ſolido te*

genito

genito ex quadrato ipſius c *ducto in* a+b; *cubo ex* c: *quas quantitates poſteriores vocemus* N.

Demonſtratio.

SUmendo enim $a+b$ per modum unius, erit per Poriſm. III. cubus ex $a+b+c$ æqualis cubo ex $a+b$, & quantitatibus N. Atqui per idem Poriſma cubus ex $a+b$ æquatur quantitatibus M. Ergo cubus ex $a+b+c$ æquatur quantitatibus M, & quantitatibus N. *Q. E. D.*

Corollarium.

CUbum igitur numeri in ſuas partes ſecti componunt ſingularum partium cubi, & dicti ſolidi.

PORISMA V.

CUbus eſto quivis X, ejuſque radix Z. Sit autem cubus X ſectus in membra, poſt ternas notas a dextra in ſiniſtram commate interjecto. Dico, radicem Z tot conſtare notis, quot membra ſunt cubi dati.

102, 503, 232	(468 Z
X	abc
	a. 400
	b. 60
	c. 8

Demonſtratio.

QUoniam per Coroll. II. Poriſm. II. in ſingulis membris latet unus cubus; tot erunt

Q mem-

membra in X, quot cubi. Sed quia, per Poriſm IV., ejuſque Coroll., in cubo X continentur cubi ſingularum radicis partium *a*, *b*, *c*; tot etiam erunt radicis partes, ac proinde & notæ, quot in X ſunt cubi. Ergo radicis Z tot ſunt notæ, quot membra cubi dati X. *Q. E. D.*

PORISMA VI.

f *k* m	abc		
X 102, 503, 232	(468 Z		
f			400+60+8
102, 000, 000			a + b + c
k	a 400		
38, 503, 000	b 60		
m	c 8		
5, 167, 232			

Iſdem poſitis, dico, in membro ultimo f *latet cubus ſolus ultimi radicis ſegmenti* a.

In penultimo membro k, unà cum 38 reſiduo membri f, *latet ſolidus numerus ter genitus ex quadrato ipſius* a *ducto in* b; *& ſolidus ter genitus ex quadrato ipſius* b *ducto in* a; *& cubus ipſius* b.

In membro m, *unà cum 5167 reſiduo membri k, continetur ſolidus ex quadrato ipſius* a+b, *id eſt* a *cum* b, *ter ducto in* c; *& ſolidus ex quadrato ipſius* c *ter ducto in* a+b; *& cubus ipſius* c.

De-

Demonſtratio.

CUm enim per Poriſma V. radix Z tot conſtet notis, adeoque & ſegmentis, quot ſunt membra in X; in ſingulis autem membris, ut patet ex Poriſm. III. & IV., ejuſque corollario, lateat cubus alicujus ſegmenti radicis: manifeſtum eſt, ſegmenti radicis ultimi *a*, adeoque & maximi, cubum latere in membro *f* ultimo, ac proinde maximo; & ſic deinceps Ex quibus etiam, & per III. ac IV. Poriſ. patet de ſolidis. Conſtat ergo quæſitum.

HIS PRÆMISSIS.

JAm ratio dabitur eorum omnium, quæ ſuperiori capite ad extrahendam radicem cubicam fuere præſcripta.

I. Reſumatur exemplum cap. præced. Quia

	f	*k*	m		abc
X	102,	503,	232		(468 Z
	64				
n	38,	503			a 400
	33	336			b 60
					c 8
P	5,	167,	232.		
	5,	167,	232		
			0		a + b + c
					400 + 60 + 8

per VI. Poriſma in poſtremo *f* membro nihil

conti-

continetur aliud, quàm cubus ſegmenti radicis ultimi, idcirco ex membro *f* elicitur radix cubica, quàm poteſt maxima *a*, eaque poſt lunulam reponitur, radicis quæſitæ futura poſtremum ſegmentum, ſeu nota ultima: cubus verò ejus ſubtrahitur a membro *f*, reſiduo 38, ſi quod ſit, infra lineam notato. Quia autem in reliquis membris omnibus, præter cubos reliquorum ſegmentorum radicis, continentur in ſingulis præterea ſex ſolidi; idcirco hæc operatio ſoli poſtremo membro convenit, & in ſequentibus membris non repetitur.

II. Quod verò nota radicalis *a* ſit legitima, licèt extracta ſit ex membro *f* ſimpliciter accepto, hoc eſt loci valore diſſimulato; ſic oſtendo. Tota radix Z tot conſtat notis, quot X numerus datus membris, per Poriſm. V. Quare cum ſingula membra *k*, *m* tres contineant notas, ante *a* erunt tot notæ, ſeu loca, quot ante *f* locorum terniones. Ergo cum per conſtruct. *a* nota ſimpliciter accepta, ſit radix cubi latentis in membro *f* ſimpliciter accepto; *a* quoque, ex loco æſtimata, erit per II Poriſm. radix cubi latentis in membro *f* ex loci valore æſtimato. Hæc demonſtratio etiam valet in reliquis membris, in quibus compendii gratiâ, quemadmodum in pleriſque arithmeticis operationibus, loci valor diſſimulatur, nullo, ut jam oſtendi, præjudicio veritatis.

III.

	f	k	m		abc
X	102,	503,	232		(468 Z
	64	. . .	. . .		
n	38,	503	. . .	a	400
	33	336	. . .	b	60
				c	8
P	5,	167,	232		
	5,	167,	232		
			0		

$$a+b+c$$
$$400+60+8$$

III. Reliquæ radicis notæ artificio inter ſe uno quidem, ſed a priori penitus diverſo, reperiuntur. Illius rationi aperiendæ plurimum conducet, cubum binomii $a+b$ ante oculos proponere, qui per Poriſm. III. eſt

$$aaa+3aab+3abb+bbb.$$

Hujus poſtrema pars *aaa* oſtendit, in ultimo membro *f* latere ſolum cubum notæ ultimæ radicis: reliquæ partes oſtendunt, quid contineatur in membro penultimo *n*, conſtante ex 38, reſiduo membri *f*, & *k*, de quo jam agitur, ac in reliquis deinceps omnibus: Quia igitur, ut patet & ex formulâ hac, & ex VI. Poriſmate, in membro *n* continentur ſolidus ter genitus ex quadrato notæ radicalis jam repertæ *a*, ducto in *b* adhuc incognitam; item ſolidus ter factus ex quadrato ejuſdem *b* in *a*; item cubus ejuſdem *b*: manifeſtum eſt, notam illam penultimam, ſeu ſegmentum *b* radicis adhuc incognitum,

tum eliciendum eſſe ex membro *n* dat
meri penultimo, utique per diviſionem,
ſola reſolvit, quod compoſuit multiplica
Quia verò latera, membrum *n* producē
partim cognita ſunt, partim incognita, ad
ſtitutionem diviſoris aſſumenda erunt ſola
gnita, nimirum $3aa$, & $3a$, hoc eſt trip
quadrati notæ radicalis jam inventæ *a*, ne
48, & triplum ejuſdem *a* nempe 12; qu
unam ſummam collecta dant diviſorem 49

48
12
492

IV. Per hunc autem, ut eru
nota radicis latens *b*, dividitur
totum membrum *n* 38, 503,
demptâ notâ primâ, nimirum 38
hac de causâ. Quoniam diviſor
conſtans ex $3aa + 3a$, nullo modo pert
ad cubum *bbb*, utpote qui producatur ex
notâ incognita *b*; patet, per hunc dividi o
tere tantum ſolidos $3aab + 3abb$ ſupradict
Nihil autem ex hiſce ſolidis ad notam, ſeu
cum membri *n* primum pertinet, ad qu
ſe extendit cubus genitus ex *b*, quemad
dum ex iis apparebit, quæ mox ſubjung
num. VII.

V. Reperta porro per diviſionem nota r
calis *b* ducitur in triplum quadrati ex *a*, & q
dratum ipſius *b* ducitur in triplum ipſius *a*,
demum *b* in ſe ducitur cubicè, ut habean
tria producta $3aab + 3abb + bbb$, quæ in me
bro *n*, per Por. VI. continentur, atque idci
ab eodem auferuntur. Quorſum verò fiat h
ſubtractio, liquebit ex clauſulâ totius dem
ſtrationis.

V

$3aa$	48	
$3a$	12	
	——	
	492	

VI. Cur autem $3aa + 3a$ hoc eſt triplum quadrati ipſius a, & triplum ipſius a, quæ diviſorem conſtituunt, ordinari debeant juxta hanc formulam; item cur tria producta $3aab + 3abb + bbb$, hoc eſt ſolidus ex triplo quadrati notæ radicalis a ducto in notam radicalem b, unà cum ſolido ex triplo a in quadratum ipſius b, unà cum cubo ipſius b, ſcribantur juxta formulam hanc alteram: reſtat nunc, ut breviter demonſtremus. Et quidem quod attinet ad partes diviſoris $3aa + 3a$ manifeſtum eſt, quadratum ipſius a uno loco, ſeu gradu attolli altiùs, quàm a: ideoque 8, prima nota ipſius $3aa$, 48, ponenda ſupra 1, ſecundam notam tripli ipſius a, id eſt 12. Quod attinet ad tria producta, quia $3abb$ fit ex $3a$ in bb, & cubus bbb fit ex b in bb, eſtque a nota radicis uno loco altior, quàm b; manifeſtum eſt ex Poriſm. VI. C. II. lib. I. ſolidi $3abb$, hoc eſt 432, primam notam 2 etiam uno loco altiorem eſſe primâ notâ cubi bbb, 216; ideoque ſcribendam ſupra 1, notam ſecundam cubi bbb, 216. Rurſum, quia ſolidus $3aab$ fit ex $3a$ in ab, ſolidus autem $3abb$ fit ex $3a$ in bb (gignitur enim tam $3aab$, quàm $3abb$ ex lateribus quocumque inter ſe ordine multiplicatis, ut demonſtravi in ſchol. XVIII. lib. VIII.) eſtque a nota radicis uno loco altior, quàm b; manifeſtum eſt ſolidi $3aab$, hoc eſt 288, primam notam 8 uno quoque loco altiorem eſſe primâ notâ ſolidi $3abb$, hoc eſt 432: ideoque ſcriben-

288	3aab
432	3abb
216	bbb
——	
33336	

bendam ſupra ſolidi 432 notam ſecundam 3. Atque hæc dictæ collocationis eſt ratio adæquata.

VII. Ex qua etiam cernitur, quod ſupra n. IV. aſſumptum fuit, nihil ex ſolidis $3aa$, & $3abb$ pertinere ad notam primam membri n.

	f	k	m		abc
X	102,	503,	232		(468 Z
	64	. . . .	. . .		
n	38,	503	. . .	a	400
	33	336	. . .	b	60
				c	8
p	5,	167,	232		
	5,	167,	232		
			o		a+b+c
					400+60+8

Nam ſi tria illa producta ſic collocata addantur, patet cubi 216 primam notam 6 reponi in primo loco ſummæ 33336, ſolidos verò $3abb$, & $3aab$, hoc eſt 432, & 288 totaliter pertinere ad loca ſummæ ſequentia. Et quia trium productorum ſumma 33336 æquè multis conſtat notis, ac membrum n, utpote per Poriſma VI. in eo latens, adeoque ab illo ſubtrahenda; manifeſtum eſt, nihil quoque ex ſolidis $3aab$, & $3abb$ contineri in primo membri loco; ac proinde cum dicti ſolidi ſoli ſint dividendi, ut oſtendi num. III. dividitur membrum n demptâ notâ primâ.

Por-

Porro trium productorum valorem verum exprimit hæc formula, quem in operando diſſimulatum eſſe ſine veritatis præjudicio, liquet ex ſupra demonſtratis n. II.	28800, 000 4320, 000 216, 000 ——— 33336, 000

VIII. Reliquum eſt, ut dicamus, cur ex membris cæteris eodem prorſus modo eliciantur radicales notæ reliquæ, quo ex penultimo. Cauſa eſt manifeſta ex Poriſ. VI. Quemadmodùm enim in membro penultimo *n*, compoſito ex 38 reſiduo membri *f*, & ex *k*, continebatur $3aab + 3abb + bbb$; hoc eſt ſolidus ex quadrato radicalis notæ *a* ducto ter in radicalem *b*, & ſolidus ex radicali *a* ter ductâ in quadratum radicalis *b*, & cubus ipſius *b*; ita in membro *p*, quod componitur ex 5167 reſiduo membri *n*, & ex *m*, continentur ſolidus ex quadrato radicis eouſque acquiſitæ $a+b$, hoc eſt *a* cum *b*, ter ducto in radicalem *c*, unà cum ſolido ex $a+b$ ter ducto in quadratum ipſius *c*, unà cum cubo ipſius *c*, quæ quantitates, ſi $a+b$ brevitatis causâ interpretemur per *d*, exprimuntur hac formulâ, $3ddc + 3dcc + ccc$, quæ formula per omnia ſimilis eſt priori $3aab + 3abb + bbb$.

IX. Poſtremò quæritur, quare cum membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, pro radicali notà ſcribenda ſit unitas.

Eſto cubus G, ejuſque radix L. Quoniam	G 3, 307, 949
per Poriſ. V. 1 in radice L tot ante ſe habet notas, ſeu loco, quot	149 L

ante 3 ultimum membrum cubi dati antecedunt

R mem-

membra ; manifeſtum eſt hujus valorem eſſe 3 , 000 , 000 , illius verò 100 , ſic , ut 1 ante ſe tot habeat cifras , quot 3 cifrarum terniones. Atqui cubus numeri 100 , nempe 1000 , 000 , tot etiam ante 1 habet cifrarum terniones, quot in radice 100 ſunt cifræ , ut patet ex actu ipſo multiplicationis. Ergo etiam cubus radicis 100 tot habet cifras , quot membrum 3 , 000 , 000. Ergo cubus ipſius 100 , nempe 1 , 000 , 000 , latet in membro 3 , 000 , 000 , ac proinde 1 eſt vera radicalis nota , quæ ex ultimo membro 3 erat elicienda.

X. Explicatis hunc in modum, ac demonſtratis omnibus , quæ ad extrahendam e numero dato radicem cubicam fuere præcepta , demonſtratio tot ſic concluditur.

Numerus datus X , ut patet ex toto opere extractionis , æqualis eſt cubo ex a , ſolido ter ex quadrato ipſius a in b , ſolido ter ex a in quadratum ex b , cubo ex b ; item ſolido ter ex quadrato ipſius $a + b$ in c , ſolido ter ex $a + b$ in quadratum ipſius c , cubo ex c.

	abc
102 , 503 , 232	(468 Z
X	
	a 400
	b 60
	c 8

Quæ quantitates , $a+b$ interpretando per d , ſpecioſè ſic exprimuntur.

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb$$
$$+ 3ddc + 3dcc + ccc$$

At iiſdem quantitatibus per Poriſ. IV. æquatur cubus radicis Z , ſeu $a + b + c$. Ergo X eſt ipſe cubus radicis Z , ſive $a + b + c$. *Q. E. D.*

CAP.

Eſt autem numerus datus X æqualis quantitatibus ſupradictis, quia illæ omnes ab eo fuere ſubtractæ, nec quidquam ultimâ ſubtractione peractâ ſuperfuit. Quod ſi aliquid ſuperfuiſſet, tunc numerus datus, illo reſiduo mulctatus, fuiſſet æqualis quantitatibus dictis; ac proinde & cubus radicis inventæ.

C A P. V.

Cujuſcumque radicis extractio.

QUadratam, & cubicam cæteræ omnis generis radices quadam proportione imitantur. Quemadmodum enim, ut ex cap. II. & IV. patuit, harum extractio ex generatione quadrati, ac cubi a radice binomiâ derivata eſt; ita & reliquarum quæque ex geneſi poteſtatis ſuæ derivabitur. Itaque generale artificium radicis, e poteſtate datâ eliciendæ exhibent formulæ poteſtatum a radice binomiâ genitarum.

	0. Unitas.
Radix.	1. $a + b$.
Quad.	2. $aa + 2ab + bb$.
Cubus.	3. $aaa + 3aab + 3abb + bbb$.
Quadquad.	4. $aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb$.
Superſol.	5. $aaaaa + 5aaaab + 10aaabb + 10aabbb + 5abbbb + bbbbb$.
Quad. cub.	6. $aaaaaa + 6aaaaab + 15aaaabb + 20aaabbb + 15aabbbb + 6abbbbb + bbbbbb$.

Superſol.

Superſol. II. $7a7 + 7a6b + 21a5b2 + 35a4b3 + 35a3b4 + 21a2b5 + 7ab6 + b7$.

Radix $a+b$ in ſe ducta gignit quadratum: hoc in radicem facit cubum: cubus in radicem facit quadratoquadratum: & ſic deinceps, poteſtate quavis in radicem ductâ gignitur proximè altior. Poteſtates porro, ut liquet ex propoſitione VIII. lib. IX. ejuſque ſcholio, ſunt termini progreſſionis geometricæ, ab unitate incipientis, in qua quorum unaquæque poteſtas locum occupet, & quot habeat unaquæque dimenſiones, indicant numeri ſingulis appoſiti, qui eâ de causâ exponentes appellantur. In poſtremâ formulâ brevitatis causâ $a7$ ſignificat $aaaaaaa$: &c.

Reliquum eſt, ut qua ratione, per formulas jam dictas, cujuſvis generis radicum extractiones dirigantur, exponamus.

Numerus datus, ex quo radix extrahenda eſt, a dextrâ in ſiniſtram dividatur in membra, tot notis conſtantia, quot indicantur ab exponente poteſtatis, radicem extrahendam denominantis, præter membrum ultimum, quod conſtare poteſt paucioribus. Quoniam igitur quadratus duas, cubus tres habet dimenſiones; in hoc poſt ternas, in illo poſt binas quaſque notas comma interponitur. Quod ſi numerus datus minor ſit, quàm, ut ſic in membra dividi poſſit, quid tum facto ſit opus, & quì radix data ex eo elicienda, dicetur Cap. VII.

Tum formula poteſtatis, radicem quæſitam denominantis, inſpicienda. Hujus poſtremum nomen, ſive particula continet operationem, poſtre-

poſtremo membro debitam: per reliquas omnes, membri penultimi, ac cæterorum extractio dirigetur. Quoniam igitur in poſtremâ particulâ continetur ſola radicis quæſitæ poteſtas pura; elicienda erit ex membro ultimo numeri dati radix ejus generis, cujus petitur, quàm poterit maxima, præſidio tabellæ, continentis poteſtates ſimplicium numerorum 2, 3, 4, &c. quam eum in finem oportebit conficere. Reliquis deinde, ut Cap. I. & III. num. II. præſcribitur, expletis, abſoluta eſt operatio poſtremi membri.

In operatione membri penultimi, quæ & omnibus reliquis communis eſt, duæ ſunt partes præcipuæ: prima inventio diviſoris, per quem nova radicalis nota debet innoteſcere: ſecunda, quo modo nova nota radicalis, diviſoris opera inventa, multiplicari debeat, ut habeantur producta, quæ a membro auferantur. Utrumque formulæ poteſtatum pulcherrimè exhibeat, litterarum *a*, & *b* variâ conjunctione. Et *a* quidem ſignificat quidquid ex radice eatenus acquiſitum eſt, ac cognitum: *b* verò notam radicis deſignat adhuc incognitam, & proximè inveniendam. Inventionem diviſoris indicant particulæ mediæ per litteras *a*, hoc eſt per id, quod in iis cognitum jam eſt: medias autem particulas voco omnes, demptâ primâ, & ultimâ. Multiplicationis modum præſcribunt particulæ omnes, demptâ ultimâ, quam ſupra jam dixi ſoli primo membro inſervire.

Itaque, quoniam in particulâ mediâ formulæ

læ quadrati habetur 2a; radix, eatenus inventa, duplicata dabit diviſorem. Rurſum, quoniam in eâdem formulâ, demptâ ultimâ particulâ, habentur $2ab + bb$; oportebit diviſorem, hoc eſt $2a$ ducere in b notam radicalem proximè inventam, & ipſam b in ſe ipſam.

Pari modo, quia in particulis mediis formulæ cubi habentur $3aa + 3a$; quadratum radicis eatenus inventæ triplicatum, & ipſa radix triplicata dabunt diviſorem, ſed eâ ratione diſpoſitæ, ut præſcribitur num. III. Cap. III. Rurſum, quoniam in formulâ cubi, demptâ particulâ ultimâ, habentur $3aab + 3abb + bbb$; oportebit propter $3aab$, triplum quadrati radicis eatenus inventæ ducere in notam, jam proximè inventam b; & propter $3abb$, triplum ipſius radicis in quadratum ipſius b, & propter bbb, ducenda erit b cubicè in ſe ipſam.

Sed placet hujus methodi generalis exemplum dare in radice ſuperſolidâ primâ, cujus nimirum poteſtas eſt dimenſionum 5. Oporteat igitur radicem ſuperſolidam primam extrahere ex numero X.

	d	c		a b
X	4591,	65024	(	5 4
	3125			B
f	1466,	65024		
	1466	65024		
		0		

I. Quoniam hujus radicis poteſtas eſt 5 dimenſionum; poſt quinque notas ponatur comma, eritque numerus X ſectus in duo membra d, & c; ac totidem notis conſtabit radix.

II. Inſpiciatur formula ſuperſolidi. Quoniam

niam ultima ejus particula eſt *aaaaa*, oportet ex ultimo membro *d* elicere radicem ſuperſo-

$$\overset{6}{aaaaa} + \overset{5}{5aaaab} + \overset{4}{10aaabb} + \overset{3}{10aabbb}$$
$$+ \overset{2}{5abbbb} + \overset{1}{bbbbb}.$$

Formula ſuperſolidi.

lidam. Præſidio igitur tabellæ, ad eum finem conſtruendæ, ut ſimplicium Superſolidi contineantur, quæratur ſuperſolidus ipſi membro *d* par, aut proximè minor. Is eſt 3125, ejuſque radix 5, quam ſcribe poſt lunulam: poteſtatem verò 3125 aufer a membro *d*, reſiduo 1466 infra lineam notato. Hæc operatio ſoli postremo membro convenit.

III. Reſiduo 1466 adſcribe membrum *c*, ut ex utroque fiat membrum novum totale *f*. Jam dictum ſupra, medias particulas, (quæ hìc ſunt, ſecunda, tertia, quarta, quinta,) dirigere per litteras *a* diviſoris inventionem. Quoniam igitur in quintâ reperis 5*aaaa*, radicis hactenus inventæ, quam deſignat *a*, biquadratus erit quintuplicandus, ut fiat *g*. Et quia in quartâ habetur 10*aaa*, oportebit cubum ipſius *a* decuplare, ut fiat *h*. Rurſus, quia in tertiâ particulâ reperio 10*aa*, decuplandus erit quadratus ipſius *a*, ut fiat *k*. Tandem, quia in ſecundâ habetur 5*a*, quintiplicanda erit *a*, ut fiat *m*. Hi quatuor numeri, notis, ut hìc adjecta declarat formula, diſpoſitis, in unam ſummam collecti, dabunt *n* diviſorem, per quem tentanda eſt diviſio membri *f*, ut innoteſcat proxima radicis nota 4 incognita, deſignata per *b*.

3125.	g
1250.	h
250.	*k*
25.	m
3252525.	n

IV.

IV. Reliquum eſt, ut multiplicatio ad e
tractionem requiſita inſtituatur. Eam verò
rigi a totâ formulâ, demptâ particulâ ultim
quæ hìc ſexta, jam dictum ſupra. Quonia
igitur particula quinta eſt 5*aaaab*, *g* quint
plum biquadrati radicis prius acquiſitæ *a* (
ducendum eſt in *b* (4) notam radicalem paul
ante incognitam, & jam proximè inventam,
fiat *p*. Deinde, quia particula 12500.
quarta eſt 10*aabb*, oporte- 20000.
bit *b* decuplum cubi ex *a* (5) 16000
ducere in quadratum ex *b* (4), 6400.
ut fiat *q*. Rurſum, quia parti- 1024
cula tertia eſt 10*aabb*, decu- ————
plum quadrati ex *a* 5, nempe 146665024.
k, ducendum erit in cubum ex *b* 4, ut fiat
Jam quia particula ſecunda eſt 5*abbbb*, quint
plum ipſius *a* (5) ducendum erit in biquadr
tum ex *b* (4) ut fiat *s*. Denique quia prin
particula eſt *bbbbb*, oportebit *b* (4) ad ſurde
lidum multiplicando evehere, ut fiat *t*.

Hæc 5 producta numeris, ut in adjectâ fo
mulâ collocatis, in unam colligantur ſumma
quæ a membro *f* ſubducatur.

Eodem prorſus modo, ſi plura eſſent mem
bra, ex illis, eâdem formulâ dirigente, not
radicales reliquæ elicerentur, litterâ *a* ſempe
deſignante totam radicem eatenus acquiſitam
(quæ hìc jam eſſet 54) *b* verò ſignante notam
radicis incognitam, proximè inveniendam. A
que ita educta eſt radix ſurdeſolida prima B e
numero dato X, qui, quod poſt ultimam ſub
tractionem nihil ſuperfuerit, verè eſt ſuperſo
lidus, ſive ſurdeſolidus primus.

Aliæ radices quæcunque per formulas un

cui-

cuique poteſtati proprias ſimili planè artificio extrahentur.

Demonſtratio

PORro horum omnium facilis eſt ex iis, quæ cap. II. & IV. in radicis quadratæ, ac cubicæ demonſtrationibus dicta ſunt.

Cæterum, quamvis methodus jam tradita ad omnes omnino poteſtates ſe extendat, convenit tamen potiſſimum ſuperſolidis. In reliquis eſt alia quædam via facilior. Cum enim in quālibet ſerie numerorum continuè proportionalium, omnes termini, hoc eſt omnes poteſtates, ſint vel ſuperſolidi, vel quadrati, vel cubi ſimul, & quadrati, ut demonſtravi in Sch. Prop. VIII. Lib.. IX.; manifeſtum eſt, ex quālibet poteſtate non ſuperſolidâ radicem ipſi propriam elici poſſe extractione radicis quadratæ, aut cubicæ, aut utriuſque ſæpius repetitâ. Quod ita fiet.

Ex Scholio noſtro poſt Prop. VIII. Lib. IX. cognoſce, an poteſtas radicis extrahendæ ſit quadratus ſimul, & cubus; an quadratus, vel cubus tantum. Si eſt quadratus ſimul, & cubus, toties extrahe radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens, ejuſque dimidium, & dimidii dimidium, & ſic deinceps poteſt biſecari; & toties cubicam, quoties reſiduum, & reſidui pars tertia, & ſic deinceps poterit triſecari. Detur extrahenda ex A numero R18), id eſt radix poteſtatis, cujus exponens 18. Quoniam 18 poteſt biſecari, extrahe ex A radicem quadratam B. Et

A (B
(C
(D

quia reſiduum 9 non poteſt biſecari, ſed tri-
cari; ex radice B extrahe radicem cubicam
Rurſum, quia reſidui tertia pars 3 poteſt tri
cari, ex radice C extrahe rurſus radicem cu
cam D: erit D, R18), ex dato numero A
tracta. Oporteat deinde ex numero A extra
re R6) hoc eſt radicem, cujus poteſtas
ponentem habet 6. Quoniam 6
poteſt biſecari, ex A elice ra- A {
dicem quadratam F: & quia
reſiduum 3 non poteſt biſeca-
ri, ſed triſecari; ex F elice radicem cu
cam G: erit hæc R6), ex dato nume
extracta.

Si poteſtas radicis extrahendæ eſt cubus t
tùm, toties extrahenda eſt radix cubica, q
ties exponens, & ejus tertia pars, & tertia t
tiæ, & ſic deinceps poteſt triſecari: ut ſi ex n
mero A extrahenda ſit R27). Quia 27 pot
triſecari, ex A extrahe R3)
H: & quia ipſius 27 tertia pars A
9 poteſt triſecari, ex H extra-
he R3) I: & quia ipſius 9 ter-
tia pars 3 poteſt triſecari, ex
I elice R3) *K*: erit *K*, R27), ex dato n
mero A extracta.

Si poteſtas radicis quæſitæ ſit quadratus ta
tùm, toties extrahe radicem quadratam, qu
ties poteſtatis exponens, ejuſque dimidium,
dimidii dimidium, & ſic deinceps poteſt bi
cari: ut ſi oporteat ex dato nu-
mero A extrahere R8), quia
exponens 8 poteſt biſecari, ex A
A extrahe R2) M: & quia
dimidium 4 poteſt biſecari, ex

M ex-

M extrahe R2) N : rurſum quia dimidium 2 poteſt biſecari, ex N elice R2) O : erit O, R8), quæ ex numero dato quærebatur.

Horum omnium demonſtratio patet ex Scholio Prop. VIII. Lib. IX.

CAP. VI.

Extractio quarumlibet radicum e quibuſcumque fractis.

FRactorum alii communes ſunt, alii, quos decimales Libro II. Cap. IX., & ſeq. appellavimus. Radices ex utriſque hoc capite eliciemus.

Ex Fractis communibus radix quæcumque.

OPus totum unicâ præceptione continetur. Ex numeratore, & denominatore fractionis datæ radices extrahantur, quales expetuntur. Fractio ex his compoſita erit radix quæſita fractionis datæ.

a		c
9604		98
39601	{	199
b		d

Ut ſi ex fractione datâ *a*, *b* petatur radix quadrata, vel alia quævis; ex numeratore *a* eliciatur radix *c* ſpeciei datæ, item ex nominatore, quæ ſit *d*. Fractio *c*, *d* erit radix quæſita fractionis datæ *a*, *b*.

Demonſtratio eſt manifeſta, quia ex vi conſtructionis fractio *c*, *d* juxta exigentiam radicis datæ multiplicata producet fractum *a*, *b*.

Ex Fractis decimalibus Radix quadrata.

SI decimalis dati maximum ſignum eſt par, ut fit in A; extrahe ex A, tamquam purè integro radicem, cujus primam notam affice ſigni maximi dimidio. Erit hæc, nempe B, radix quæſita.

	I II	I
A	240 I	(49
c	2401,	49
k	100.	10,

Si ſignum maximum eſt impar, ut in C, adjectâ cifrâ fiat par, ut in D. Tum ex D eliciatur radix E, ut ſupra. Erit hæc radix quadrati C.

	I II III	
C	2 0 2 5	
	I II III IV	I II
D	2 0 2 5 0	(1 4 2
	III IV	
	8 6	

Ad demonſtrationem eſto Lemma: ſi a numero G, qui conſtet unitate, & cifris paribus, auferatur ſemiſſis cifrarum, ut in *K*; erit *K* radix quadrata numeri G. Nam, ut pat[e] ex multiplicationis compendio Lib. I. C. VII habetur quadratus ex *K*, ſi cifræ ejus duplen[tur]. Sed ex vi conſtructionis, tunc *K* fit G. Ergo G eſt quadratus ex *K*. Hoc poſito

G 1000[…]
K 100

Demon-

Demonſtratur Pars I.

FRactus c, k, cujus numerator c iiſdem conſtat notis, quibus A, nominator verò k tot cifris, quot indicantur a ſigno maximo ipſius A, æquatur ipſi A, per Theorema II. Cap. X. Lib. II. Atqui, ut ex fracto c, k extrahatur radix quadrata, tantùm opus eſt, ex numeratore c, hoc eſt ex dato A, tamquam integro, elicere radicem quadratam l, & ex nominatore k radicem f: elicitur verò ex k radix quadrata, ut patet ex Lem., ſi dimidietur cifrarum numerus, hoc eſt ſi dentur ipſi f tot cifræ, quot indicantur a ſemiſſe maximi ſigni ipſius A. Ergo etiam, ut ex A extrahatur radix, ſolùm opus eſt, ex A tamquàm integro elicere radicem d, eique ſubſcribere nominatorem f, qui conſtet unitate, & tot cifris, quot indicat ſemiſſis maximi ſigni ipſius A, ut habeatur fractus d, f. Atqui fractus d, f, per Theor. II. C. X. l. II., eſt æqualis B; cum d ex vi conſtructionis iiſdem conſtet notis, quibus B; & f tot habeat cifras, quot indicantur a ſemiſſe maximi ſigni ipſius A; hoc eſt, per conſtruct., quot indicantur a ſigno maximo ipſius B. Ergo etiam B eſt radix quadrata dati A. *Q. E. D.*

Demonſtratur Pars II.

PEr Axioma Cap. X. L. II. D eſt æqualis C. Atqui per I. partem E eſt radix quadrata ex D. Ergo E etiam eſt radix quadrata ex C. *Q. E. D.*

Ex fractis decimalibus radix cubica.

SI maximum ſignum decimalis dati triſecari poſſit, ut in A contingit; ex A tamquam purè integro radicem extrahe cubicam, cujus primam notam affice ſigni maximi triente. Erit hæc, nempe B, radix cubica ex A.

	I II III		I
A	973 3 6		(46 B.
	97336	a	46 c
	1000	b	10 d

	I II III IV	
C	9 7 3 3 6	
	I II III IV V VI	I II
D	9 7 3 3 6 0 0	(21 3 F
		II III IV V VI
		7 0 0 0 3

Si maximum ſignum triſecari nequeat, ut accidit in C, adjice unam, vel duas cifras, ut poſſit, quemadmodum vides in D. Tum ex D elice radicem cubicam F, ut ſupra.

Ad demonſtrationem eſto Lemma: ſi detur numerus G conſtans unitate, & cifris, quas metitur ternarius; *K* unitas cum cifrarum triente erit radix cubica ipſius G.

1000000 G
100 *K*

Nam, ut patet ex multiplicationis compendio, habetur cubus ex *K*, ſi ipſius cifræ triplentur. Sed tunc ex vi conſtr. fit G. Ergo G eſt cubus ex *K*.

Hoc poſito, demonſtratio planè ſimilis erit præcedenti.

Ex

Ex fractis decimalibus radix quæcumque.

EX numero dato, tamquam purè integro, extrahe radicem datam. Tum maximum ſignum dati numeri divide per exponentem radicis datæ. Quotiens dabit ſignum, quo afficienda eſt nota prima radicis inventæ. Si maximum ſignum per exponentem radicis datæ dividi non poſſit, adjice tot cifras decimales, ut poſſit; & operare, ut ſupra.

Exemplum.

	I	II	III	IV	V				I	
F	4 5	9	1	6 5	0	2 4			(5 4	H

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X		I	II		
F	1 0	9	9	5	1	1	6	2	7	7	7	6	(2	5 6	H

OPorteat, ex numero F extrahere R5) hoc eſt ſuperſolidam primam. Ex F, tamquam integro, elice R5) Tum per 5 exponentem radicis datæ divide maximum ſignum dati F, quod in primo exemplo eſt V. ſeu 5, in ſecundo eſt X. ſeu 10. Quotiens, qui eſt in primo 1; 2 in ſecundo, dat ſignum, quo afficienda eſt prima nota radicis inventæ; eritque H radix ſuperſolida dati F.

Demonſtratio eadem prorſus, quæ ſupra, præmiſſo hoc Lemmate. Datus ſit numerus C, conſtans unitate, & cifris, quas numerus D metiatur per numerum E. Erit numerus F, conſtans unitat & cifris a quotiente E indicatis, radix dati nu meri C, à diviſore D denominata.

C	100000	, oooo
R5)		R2)
D		E
		100
		F

Nam cum D metiatur cifras dati C per E; in E ductus producet cifras dati C. Ergo p XVI. l. VII. etiam E in D producet C. Atq per conſtruct. E eſt numerus cifrarum ipſius Ergo cifræ F ductæ in D producunt cifras d. C. Ergo C eſt poteſtas, cujus exponens eſt & radix F.

C A P. VII.

Approximatio radicum.

SI in extractione radicis quadratæ, cubic vel alterius cujuſcumque poſt ſubtracti nem ultimam aliquid ſuperſit; certum erit iis, quæ II., & IV. Cap. ſunt demonſtrata, merum, cujus radix quærebatur, non eſſe q dratum, aut cubum, aut aliam poteſtatem; pro nde non habere rad cem quadratam, cub cam, ſeu aliam pro quæſiti ratione. Po

runt

runt nihilominus radices exhiberi, quæ ad veram impoſſibilem, quæ ſurda, ſeu irrationalis ab Arithmeticis appellari ſolet, accedant propiùs ſemper, ac propiùs in infinitum; hoc eſt quæ ab impoſſibili verâ differant quantitate minori quacumque datâ; ac proinde quæ per ſeipſas multiplicatæ quadraticè, vel cubicè, vel aliter pro gradu dato, producant quadratos, vel cubos, vel &c. differentes a dato numero, quantitate quacumque datâ minori. Artificium eſt ejuſmodi.

I. Numero dato *a*, ex quo aliquid ſuperfuit, adjiciantur aliquot cifrarum decimalium binarii,

```
  a        b                    c    d     m
         I  II  III  IV          I  II
2507 | 0  0 ,  0   0    ( 50 | 0 6   2500
   7  I  II  III  IV       I  II  III  IV
   h  9  9   6   4     25060  0    3  6
             f                     n
```

ſi radix quadrata petitur; aliquot terniones, ſi cubica; aliquot quaterniones, ſi biquadrata; quinades, ſi ſuperſolida; & ſic deinceps, juxta exponentem uniuſcujuſque poteſtatis. Ex numero ſic aucto *a*, *b* radicem talem elice, qualis petitur, ut Capite præcedente traditum eſt; hoc eſt extractionem radicis inchoatam proſequere. Novæ radicales notæ *d*, prioribus *c* adjunctæ, radicem dabunt, propinquiorem veræ impoſſibili.

m

i ii iii iv v vi i ii iii i ii
2507 } 0 0,0 0 (50 } 0 6 250 0
a b c d.

ii iii iv v vi i ii iii iv v vi
K 7 9 9 6 4 2506 0 0 3 6
f n

In exemplo extractionis quadraticæ, hic appoſito, quadratum prioris radicis *c* eſt *m*, quod a numero dato *a* deficit, numero *k*. Quadratum verò radicis *c d* eſt *n*, quod deficit ab dato *a*, per *f*. Eſt verò *f* minus, quàm *k*. Porro notæ reſidui *f* ſunt ſemper homogeneæ totidem primis notis numeri *a*, *b*.

Quod ſi pluribus ſemper, ac pluribus cifrarum binariis, ternariis &c. adjectis continuetur extractio; appropinquabitur ad radicem veram propiùs in infinitùm, ſic, ut differentia fiat quacumque datâ minor: numquam tamen ad æqualitatem pervenietur.

II. Ex his patet, quid præſtandum ſit in fractis vulgaribus; adjiciendæ videlicet cifræ, ut ſupra, tam numeratori, quàm nominatori, ſi in utroque aliquid ſuperfuit; aut alterutri tantùm, ſi aliquid ſuperfuit tantùm in alterutro.

III. Eodem artificio ex numero, quantumvis parvo, extrahetur radix, quantumvis alta. Exemp. gr. ex binario R9) hoc eſt radix cubo-cubica, Adjungentur enim binario aliquot cifrarum nonades, quia exponens radicis quæſitæ eſt 9, & ex binario ſic aucto extrahetur radix quæſita, ut Capite præcedente traditur.

Quo-

Quoniam verò mirum videri ſolet, methodo extractionis jam explicatâ per fractos numeros ad radicem veram appropinquari in infinitum, neque tamen ad eam poſſe unquam perveniri, ac proinde impoſſibilem eſſe; videtur hic locus exigere, ut ejus rei demonſtrationem producamus. Eſto igitur

THEOREMA.

Numerus non quadratus, aut non cubus ſit a, hoc eſt, cujus integer numerus nullus ſit radix quadrata, vel cubica. Demonſtrandum eſt, ejus radicem etiam, ne fractionibus quidem ullis poſſe exhiberi; hoc eſt, nullum poſſe dari, aut fractum numerum, aut mixtum ex integro, & fracto, qui in ſe quadraticè, vel cubicè producat datum numerum a.

Demonſtratio.

1.	x	a.6
1.	x	1.a.6

$$B\,\frac{m}{n} \qquad \frac{y}{z}\,D$$

Detur enim, ſi fieri poteſt, fractus B, qui ſit radix numeri *a*: (ſi fingeretur radix eſſe integer cum fracto, integro ad fractum reducto, prior caſus non mutabitur) hic fractus B, in ſe ductus quadraticè, aut cubicè, alium gignet fractum D: videlicet ſi tam numerator *m*, quàm nominator *n* in ſe ducantur quadraticè, aut cubicè. Quoniam igitur tam *a* per hyp., quàm D per conſt. ſunt quadratus, vel cubus fracti B; erunt *a*, & D æquales. Quare, cum per Theor. II. Cap. II. L. II. unitas (1) ſit ad fractum D, ut nominator

nator z eſt ad numeratorem y; etiam 1 erit
n, ut z ad y. Jam verò, quia numeri z, &
quadrati ſunt, vel cubi, utpote geniti ex n
meris n, & m in ſe ipſos ductis quadraticè, v
cubicè; inter eos cadent, vel unus medi
proportionalis, per XI. L. VIII. ſi quadr
ſint; vel duo medii, per XII. L. VIII. ſi ſu
cubi. Quare, ut jam oſtendi, cum 1 ſit ad
ut z ad y; etiam inter 1, & a cadet unus m
dius x, vel duo x, t per VIII. L. VIII. Erg
per VIII. L. IX. a quadratus eſt, vel cubu
ejuſque radix quadrata, vel cubica eſt nume
rus integer x. Quod eſt abſurdum, cum hyp
theſim deſtruat. Non igitur &c.

Eodem modo Theorema non de quadra
ſolum, & cubo, ſed etiam de poteſtate qu
cumque demonſtrabitur.

*Quamvis autem numerorum non quadrat
rum, & non cuborum &c. radices impoſſibi
ſit numeris explicare; poſſunt nihilominus e
hiberi geometricè hunc in modum.*

Datus ſit numerus non quadratus 12, cuj
duo latera, (hoc eſt, quæ per invicem mu
tiplicata ipſum producunt) ſint 3, & 4
Exhibeantur deinde duæ rectæ lineæ, una
partium æqualium, quarum altera ſit 4; inte
que eas per XII. L. VI. recta inveniatur med
proportionalis. Hæc erit radix quadrata. Eju
enim quadratum per XVII. L. VI. æquale e
extremarum 3, & 4 rectangulo, quod e
12 ex hyp. Quare numeri ſurdi, ſeu irratio
nales meritò geometrici numeri appella
poſſunt.

Scho-

Scholium.

Tametſi radices ſurdæ nullis numeris, ut jam oſtendimus, exprimi poſſint; ex his tamen, quod minus exercitatis incredibile videri queat, quædam inter ſe commenſurabiles ſunt; ac proinde licèt ipſæ nequeant exprimi numeris, poteſt tamen earum proportio. Rem omnem triplici Theoremate complexus exponam.

THEOREMA I.

Radices ſurdæ numeris abſolutis incommenſurabiles ſunt.

Demonſtratio.

5	R2) 8
a	b
aa	bb
25	8

Data ſit R2) 8 *hoc eſt radix quadrata numeri* 8), *&* 5. *Si* 5, *&* R2) 8 *commenſurabiles ſint, erunt inter ſe, ut aliquis numerus* a *ad aliquem numerum* b. *Ergo etiam quadratum ex* 5, *nempe* 25, *eſt ad quadratum* R2) 8, *nempe ad* 8, *ut* aa *quadratus numeri* a *eſt ad* bb *quadratum numeri* b. *Igitur, quia primus* 25 *quadratus eſt, etiam ſecundus* 8, *per* XXIV. L. VIII. *quadratus eſt; quod repugnat hypotheſi.*

Eodem diſcurſu, ſed per XXV. L. VIII. *ipſum de ſurdâ radice cubicâ demonſtrabitur. Atque inde id non obſcurè concluditur de qualibet.*

Corol-

Corollarium.

I. *HInc patet, diametrum in quadrato la teri incommenſurabilem eſſe. Cum eni per XLVII. Lib. I. quadratum diametri du plum ſit quadrati ex latere; erit diamete R2) 2 hoc eſt radix quadrata binarii: late verò, hoc eſt 1, & R2) 2 incommenſurabil ſunt.*

II. *Hinc aliâ viâ colligitur veritas Theore matis ſuperiùs demonſtrati. Cum enim radic ſurdæ incommenſurabiles ſint numero abſolu cuicumque, etiam poteſtatibus ſuis incommenſ rabiles erunt, ut R2) 7 quadrato ſuo 7: R3) cubo ſuo 5. Ex quo patet, eas nullis numer ſeu integris, ſeu fractis exprimi poſſe. Si en poſſet radix ſurda numero exprimi; cum ej poteſtas etiam numerus ſit, eſſet ſurda radix ſuam poteſtatem, ut numerus ad numerum, proinde eidem commenſurabilis, contra qua oſtenſum jam ſit.*

TREOREMA II.

SI una radix ſurda, dividens ſurdam teram, quotientem gignat rationalem, eſt numerum abſolutum; ſurdæ radices il commenſurabiles erunt.

Demon-

Demonſtratio.

DAtæ ſint Rz) 12, & Rz) 3. Rz) 3 dividens Rz) 12, quotientem facit Rz) 4, hoc eſt 2. Similiter Rz) 8, dividens Rz) 18, facit Rz) A, hoc eſt Rz) B, hoc eſt fractum C. Dico igitur Rz) 12, & Rz) 3; item Rz) 18, & Rz) 8 commenſurabiles eſſe. Nam per definitionem diviſionis Rz) 3 dividens eſt ad Rz) 12 diviſam, ut unitas ad quotientem 2, qui ex hyp. abſolutus numerus eſt. Ergo, &c.

Rz) 12	Rz) 12	Rz) 4 ſeu 2
Rz) 3	Rz) 3	
		A
Rz) 18	Rz) 18	Rz) $\frac{18}{8}$
Rz) 8	(R $\frac{9}{4}$ ſeu $\frac{3}{2}$ C	
	B	

Pari modo dividens Rz) 8 eſt ad Rz) 18 diviſam, ut unitas eſt ad C, quotienientem abſolutum. Ergo, &c.

Exempla adhibui radicum quadratarum; ſed eadem eſt ratio quarumcumque.

THEOREMA III.

SI unâ radice ſurdâ diviſâ per alteram ſurdam quotiens exiſtat irrationalis, incommenſurabiles ſunt.

Demonſtratio.

DAta ſit Rz) 48, & Rz) 8. Hæc illam dividens, quotientem gignit Rz) 6, quæ irra-

irrationalis, ſive ſurda eſt; cum 6 non ſit qua-
dratus. Similiter R3) 6, dividens R3) 24
quotientem gignit R3) 4, irrationalem; cum
4 non ſit cubus.

Dico igitur R2) 48, & R2) 8; item R3) 24, & R3) 6 incommenſurabiles eſſe. Nam dividens eſt ad diviſam, ut 1 ad quotientem irrationalem R2) 6, vel R3) 4.	R2) 48 R2) 8	R2) 6
	R3) 24 R3) 6	R3) 4

Unitas autem ad quemlibet irrationalem nu-
merum, per Theor. I., incommenſurabilis eſt
Ergo etiam data radix ſurda dividens, e
data ſurda diviſa incommenſurabiles ſunt
Q. E. D.

Diviſio ſimplex radicum, quæ in hoc ſcholi
aſſumitur, per ſe eſt manifeſta.

CAP. VIII.

De tabulis Quadratorum, & Cuborum.

SI ſemel tabulæ conficerentur, quibus ſingu-
lorum ab unitate numerorum quadrati, &
cubi continerentur, ſublata eſſet magnâ expa
te radicum extrahendarum moleſtia. Præcla
igitur de Arithmeticis Paulus Guldinus noſt
meritus eſt, qui omnium ab unitate numero
rum, uſque ad decimillenarium, quadratos,
cubos exhibuit in appendice libri I. de cent
gravitatis.

Con-

TAbulas ejuſmodi ut conficias ,
ſectas extendas , ſingulas ab
:es per ſe ipſas multiplica : proven
i omnes , qui rurſum in radices d
omnes cubos . Verùm , quia mul
naguis præſertim numeris , mole
ilias breviores , quæ ſolâ additione
inſignes horum numerorum pro
peditant .

Generantur igitur quadrati
omnes

I. Ex continuâ additione num
rium ab unitate . 1 , & 3 faciunt
dratum : cui ſi addas imparem pr
9 quadratus ſecundus : huic adde
tium 7 , fit 16 quadratus tertius ;
ceps . Demonſtrat Maurolycus
p. 15.

II. Quadrati cujuſcumque d
unitate adjectâ , cum quadrato
dratum proximè majorem . De
rolyc. Arithm. Lib. I. p. 15.

Cubi verò ſic.

I. Duo primi impares 3 , &
cubum 8 . Tres impares ſequ
dant cubum ſecundum 27. Qu
impares 13 , 15 , 17 , 19 dan
64. Et ſic deinceps . Demonſtr
S

co Arithm. Lib. 1. p. 62.

II. Continuatur ſeries numerorum a 6 incipiens, & ſemper creſcens per 6. Unitas, adjecta ad 6, dat 7 differentiam primi cubi, & unitatis, quæ adjecta ad 12, dat differentiam cubi ſecundi, & tertii: & ſic deinceps omnes cuborum differen reperiuntur. Inventis autem differentiis, bentur cubi: nam ſi unitati addas 7, fit 8 cu primus, cui ſi addas ſequentem differenti 12, fit 27 cubus ſecundus; & ſic deince Vide Maurolycum Lib. citato.

	Differ.	c
6	1	
12	7	
18	19	
24	37	
30	61	1
36	91	2

Uſus Tabularum.

TAbulis jam confectis, ſic utere. Numer datum, cujus radix petitur, quære in quadratos, vel cubos; quem ſi reperis, et radicem illi adſcriptam pariter invenies: ſi reperies, quære illo proximè minorem, ra huic adſcripta erit maxima, quæ citra frac nes elici ex dato numero poteſt.

Quoniam verò tabulæ Guldini continent dratos, & cubos radicum omnium, uſque decimilleſimam, cujus quadratus eſt 100000 novem conſtans notis, cubus aut 1000000000000 notis conſtans 13; earum obtinebitur quadrata radix omnis numeri, notis conſtet non pluribus, quàm octo; & dix cubica omnis numeri, qui notis ſcrib non pluribus, quàm 12.

Quod ſi radix petatur e numero, plur not

notis conſtante; ſemper nihilominùs, per dictas tabulas, membra quatuor majora expedientur.

Oporteat ex numero *a c* elicere radicem quadratam, vel cubicam. Partire illum in membra. Tum quære in tabulis numerum *a b* ex

a b c
2,48,09,56,71,92, f(1575——
d 2 48 06 25
———
k 3,31

a b c
23,089,423,791,215 f(2847——
23 076 099 423
———
k 13 324 368

quatuor poſtremis membris conflatum, ut illo proximè minorem, qui erit *d*, & radicem illi adſcriptam *f* poſt lunulam repone. Ex reliquo deinde numero *k b c* extractionem proſequere methodo conſuetâ.

C A P. I X.

Uſus laminarum tabulæ Pythagoricæ in extrahendâ radice quadratâ, & cubicâ.

PArentur duæ laminæ, ut Cap. VI. L. I, quarum alteri inſcribantur unitas, & 8 primi quadrati; alteri verò unitas cum 8 primis cubis: eâ lege, ut cum quadrati unâ conſtant notâ,

ſcribantur in triangulo inferiori ; cum bi
notis conſtant, prima ſcribatur in triang
inferiori , ſecunda in ſuperiori : cum v
cubi tribus conſtabunt notis ; duæ primæ
inferiori triangulo reponantur , tertia in ſu
riori ; cum binis , ambæ in inferiori , & ci
in ſuperiori ; cum unâ , eam loca in inferio
appoſitâ ad lævam cifrâ , itemque aliâ cifr
triangulo ſuperiori . Tunc tamen duæ pri
notæ , quamvis in eodem triangulo conſiſta
duo loca efficiunt , ſic ut ſecunda ad deca
pertineat . Harum lamellarum hæc cubica
illa quadratica appelletur .

Uſus porro in extrahendâ radice quadr
hic eſt . Ex ultimo membro radix extrah
more conſueto. Deinde duplum radicis eate
acquiſitæ , ſi unicâ notâ conſtet , quære in
pite unius laminæ ; ſi pluribus , in capite p
rium . His ad dextram applicetur lamina q
dratica , ad ſiniſtram lamina exponens . T
adverte , quis ordo numerum contineat æq
lem , aut proximè minorem membro . Nu
rus laminæ exponentis , denominans ordine
apponatur radici antea acquiſitæ ; ipſum v
ordinem exſcriptum aufer a membro . Eod
planè modo reliqua membra expedientur .

In cubicâ ſic proceditur. Oporteat ex numero A educere radicem cubicam .

Ex ultimo membro extrahitur radix more conſueto . *Maxima* radix

A
22, 0 22 , 635 , 627
8
—
p 14 , 022
n 13 952
———
70 q

cubi-

cubica in 22 eſt 2; ejus cubus 8 ſubtractus a 22 relinquit 14, quibus adſcribe membrum penultimum 022, ut fiat totum *p* 14, 022,

819 *k*
———
11529 b
...6. c
.48.. d
———
16389 e

6
—
1(

Triplum quadrati ex radice hactenus acquiſitâ, nempe 12, ſtatue in capite duarum laminarum, quibus ad dexteram appone laminam cubica ſtram verò laminam exponent adverte, quotus ordo ſit æqualis minor membro *p*. Lamina expo eſſe nonum. Hunc igitur exc

Supra primam notam 9 c ſcripti ſcribe ejus denomin verſus lævam appone ejus q

Laminæ cubicæ ad dex nam, quæ habeat in ver prioris 2, nempe 6: ex rum, contentum in qu numeri *k* notam ſecun deſignat primum locul ris 6. Scribe ergo 6 i laminâ exſcribe nu gnati per numeri *k* 48. quem repone

Hos tres nume

ſummam *e*, quæ auferenda eſſet a membro
ſed quia non poteſt, pro *b* exſcribe ordine
octavum, qui erit *f*; & ſupra numeri *f* nota
primam 2 ſcribe 8, eique quadratum ejus
appone; perque hunc numerum loco numer
rum *c*, *d* reperi alios *g*, *h*, modo jam tradit
Deinde *f*, *g*, *h*, collectos in ſummam *n*, q
jam minor eſt membro *o*, ſubtrahe a memb
p. Et reſiduum *q* infra lineam repone.

In membris, quæ ſuperſunt, eadem oper
tio repetitur.

Ratio horum omnium pendet a demonſtr
tionibus radicum quadratæ, & cubicæ Cap.
& IV. hujus libri, & a demonſtratis Cap. VI
Lib. I.

ARIT-

ARITHMET
PRACTIC
LIBER IV
DE
REGUL

PRacticæ Arithmetic
gulæ. Prima eſt re
ſive trium ; ſecur
conſortii ; tertia
Poſitionum ſimplex, ac
gulam Falſi appellant .
pua eſt, a qua reliquæ c
quatuor ſunt partes :
tionum directa ſimplex
compoſita, everſa co
cepta hoc quarto libr
ſtranda ſuſcepi ,

C A

Regula ſimpl

MEthodus
eruitur
tus, regula P
tres numero
aurea, ob ſu

In quæſtionibus practicis, quæ nimirum ad uſus humanos pertinent, e tribus numeris datis, ſive cognitis ſemper duo ſunt homogenei, hoc eſt de eâdem re inter ſe, quorum unus annexam habet quæſtionem: ut cum dico, 60 aureos expendo 5 menſibus; quot ergo menſibus expendam aureos 254? Numeri homogenei, ſive de eâdem re, ſunt 60, & 254 aurei, quorum poſtremo annexa eſt quæſtio. Is igitur, qui annexam habet quæſtionem, tertio loco ponatur; alter de eâdem re, primo; reliquus, qui ſolitarius eſt, & homogeneus quarto incognito, in medio conſiſtat. Si jam ſit, ut primus ad tertium, ita ſecundus ad quartum incognitum; hoc eſt ſi quanto primus major, vel minor tertio, tanto ſecundus ſit major, vel minor quarto incognito: quæ tum ſolvendæ quæſtioni adhibebitur, regula Proportionum directa appellabitur.

Exemplum.

DUo gradus maximi terræ circuli continent milliaria unius horæ 48: igitur 360 gradus, hoc eſt tota circumferentia quot milliaria continebit?

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48.	360	. . . . .

Hic quanto primus eſt minor tertio, tanto ſecundus eſt minor quarto incognito.

Quod ſi, ut primus ad tertium, ita reciprocè quartus incognitus ſit ad ſecundum; hoc eſt, ſi quanto primus eſt major, minorve tertio,

tio, tanto quartus incognitus debeat eſſe major, minorve ſecundo; regula Proportionum everſa dicitur.

Exemplum I.

FOrtalitium abſolvunt 1000 Foſſores diebus 12; 325 Foſſores quot diebus abſolvent?

Foſſ.	Dies	Foſſ.	Dies.
1000	12	325	...

Hic quanto primus eſt major tertio, tanto quartus incognitus eſſe debet major ſecundo.

Exemplum II.

IN Urbe obſeſsâ 7 menſibus ali poſſunt Præſidiarii 1500: ergo menſibus 12 quot alentur?

Menſ.	Præſid.	Menſ.	Præſid.
7	1500	12	....

Hic quanto primus eſt minor tertio, tanto quartus incognitus debet ſecundo eſſe minor.

Arithmetici paſſim ex ipsâ quæſtione dijudicandum relinquunt, utrum proportio directa ſit, an everſa, ſive reciproca. Rectè id quidem: verumtamen indicium hujus rei certum aſſignari hoc poteſt. Si duo termini homogenei, hoc eſt de eâdem re, aliam rem quampiam unicam, & a quatuor terminis quæſtionis diverſam, communiter reſpiciant, circa quam lato ſaltem modo aliquid agant, ad quod duo reli-

reliqui termini ſe habeant per modum circumſtantiæ; everſa, ſive reciproca proportio erit. Ratio colligitur ex prop. XIV. l. VI.

In primo exemplo res, circa quam primus, & tertius termini, nempe Foſſores, aliquid agunt, eſt Fortalitium: in ſecundo eſt annona, obſidionis tempore conſumenda a Præſidiariis, termino videlicet ſecundo, & quarto.

Solutio directa.

MUltiplica ſecundum per tertium, & productum divide per primum. Quotiens, ſive integer ille ſit, ſive integer cum fracto, erit quartus proportionalis incognitus, qui quærebatur.

Exemplum.

Grad.	Milliar:	Grad.	Milliar.
2	48	360. fiunt	8640.
a	b	c	z

DUo gradus maximi terræ circuli continent milliaria Belgica unius horæ 48: igitur gradus 360, hoc eſt circumferentia tota, quot continet milliaria?

Collocatione factâ, ut ſupra, multiplica ſecundum 48 per tertium 360. Productum 17280 divide per primum 2. Quotiens 8640 eſt quartus, qui petebatur.

Demon-

Demonſtratio.

SI quartus proportionalis eſt integer, patet ex Pro. XX. L. VII. Si eſt integer cum fracto, patet ex eadem Prop., & ex iis, quæ demonſtravi lib. I. Cap. IX. Cum enim ex hyp. *a* ſit ad *b*, ut *c* ad z quartum, qui petebatur; erit, per XIX. L. VII., factus ex *a* in z æqualis facto ex *b* in *c*. Atqui facto ex *a* in z diviſo per *a* proveniet z. Ergo etiam facto ex *b* in *c* diviſo per *a*, proveniet z. *Q. E. D.*

Si contingat numeros de eadem re non eſſe ejuſdem nominis, & menſuræ, ante operationem erunt reducendi ad eandem, ut ſi exiſtat quæſtio: pro 10 menſibus ſolvi florenos 250: pro 20 diebus ergo, quot ſolvam? 10 menſes & 20 dies ſunt quidem de eadem re, nimirum tempore, ſed menſura diverſa; oportebit igitur 10 menſes prius ad dies reducere, quàm operatio inſtituatur.

Examen inſtituitur multiplicando primum per quartum, & ſecundum per tertium: ſi enim producta ſint eadem, rite es operatus. Patet ex Prop. X. l. VII.

Solutio everſa, ſeu reciproca.

MUltiplica primum per ſecundum, productum divide per tertium. Quotiens, ſive integer fuerit, ſive fractus erit quartus proportionalis, qui petebatur.

Exemplum.

FOſſores 1000 munitionem aliquam abſolvunt diebus 12. Foſſores 325 eamdem quot diebus abſolvent? Collocatione factâ, ut ſupra: primum 1000 multiplica per ſecundum 12; productum 12000 divide per tertium 325. Quotiens A est quartus, qui petebatur.

A
$36 \frac{300}{325}$

Foſſores.	Dies.	Foſſores.	Dies.
1000	12	325	$36 \frac{300}{325}$

Aliud.

Arcis Præfectus annonâ, quam habet, alere poteſt menſibus 7 Præſidiarios 1500. Igitur menſibus 12 quot alet?

Menſ. 7.	Præſid. 1500.	Menſ. 12.	Præſid. 875.
A	B	C	D

Primus A 7, ductus in ſecundum B 1500, facit 10500, qui diviſus per tertium C 12, dat quartum D 875.

Demonſtratio.

QUoniam ex hyp. A eſt ad C, ut reciprocè D eſt ad B, erit invertendo, ut C ad A, ſic B ad D.

C. A.

C. A. B. D.

Atque ita collocatio everſa reducta eſt ad directam, incognito D quartum in utraque collocatione locum obtinente. Ergo D rite inventus eſt ex producto ipſius A in B. diviſo per C.

Examen inſtitues, ducendo primum A in ſecundum B, & tertium C in quartum D. Si producta ſint eadem, rite operatus es; ut patet ex XIX. l. VII. Eſt enim ex hyp. ut A ad C, ita D ad B.

C A P. I I.

Regula proportionum Compoſita.

Cum termini dati, ſive cogniti ſunt plures, quàm tres, nimirum 5, aut 7 aut etiam plures; regula proportionum compoſita dicitur: eſtque duplex etiam ipſa, directa videlicet, & everſa. Inter terminos datos tres ſemper præcipui ſunt; & ex his duo de eâdem re, quibus cæteri adhærent; unus ſolitarius, & homogeneus illi, qui quæritur. Utrum quæſtio directè ſolvenda ſit, an everſè; ex indicio mox dando dijudicabitur.

Con-

Compoſita directa.

Mercatores	8
aureis	1000
Luc. aureos	700
Mercatores	10
aureis	4000
Quot Lucr. aur.?	....

I. PRoponan
quæſti
terminorum ſex
8 Mercatores
1000 aureis , l
erantur 700 a
reos . Igitur
Mercatores, 40
aureis , quot aureos lucrabuntur ? Tres num
ri principales ſunt 8 Mercatores , 700 aure
qui ſolitarius eſt , & 10. Mercatores . Du
bus de eâdem re reliqui duo adhærent , nim
rum aurei 1000, & aurei 400, qui duorum prin
cipalium de eâdem re , nempe Merc. 8. &
Mercat. 10 quaſi comites ſunt .

Ordo terminorum is erit , qui in exempl
appoſito . Nimirum tertio loco collocabitu
principalis ille , qui annexam habet quæſtione
Mercat. 10 cum ſuo comite aur. 4000. Prim
loco principalis alter de eadem re Mercat.
cum comite ſuo aur. 1000. Is verò , qui ſolit
rius eſt ſecundo loco collocabitur .

Terminis hunc in modum conſtitutis , dij
dicandum erit , directam proportionem , a
everſam contineant : quod quia multi , v
ignorarunt , vel neglexerunt ; imperfectè , &
confusè hanc regulam tradiderunt . Indiciu
porro erit hujuſmodi . Si tam in loco , ſe
membro primo , quàm tertio unus terminu
reſpectu alterius ſe habeat per modum circun
ſtantiæ , medii &c. ; ſcito quæſtionem direct
ſolvendam . Si verò in membro primo , &
tertio

tertio unus terminus reſpectu alterius quidpiam agat, exerceatve, certus eſto, proportionem eversam in quæſtione contineri, ac proinde ſolvendam eſſe eversè.

Ex hoc indicio quæſtio propoſita reperietur eſſe directa; quæ generali artificio ita ſolvitur. Terminos primi loci 8, & 1000 inter ſe multiplicando, reducito ad unum 8000. Similiter termini tertio loco poſiti 10, & 4000 ad unum reducantur 40, 000. Atque ita termini 5 redacti ſunt ad 3.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei.
8000	700	40,000.

Circa quos ſi regula trium ſimplex exerceatur, prodibit numerus incognitus, qui petebatur, 3500 aurei.

Demonſtratio

OPerationis manifeſta eſt. Cum enim plures termini per multiplicationem reducuntur ad unum, quæſtio non immutatur. Eadem ſanè quæſtio erit, ſive dicas: 8 Mercatores aureis 1000, lucrantur 700 aureos; igitur Mercatores 10, aureis 4000, quot lucrabuntur? ſive dicas octies mille aureis, Mercator 1 lucratur 700; igitur 40, 000 aureorum, Mercator 1 quot lucrabitur? Tantum enim lucratur 1 Mercator 8000 aureorum, quantum 8 Mercatores aureis 1000; & tantum 1 Mercator 40, 000 aureorum quantum 10 Mercatores 4000 aureorum. Atqui in hac poſtremâ duo termini evaneſcunt, quod primo, & tertio loco iidem recur-

currant, videlicet 1 Mercator, quorum proinde ratio habenda non eſt. Igitur ſalvâ quæſtione 5 termini ad tres ſunt reducti. Ex quo patet quæſitum.

II. Quæſtio proponatur terminorum octo. Mercatores 8; aureis 1000, menſibus 2, lucrantur aureos 700: igitur 10 Mercatores, 4000 aureorum, menſibus 4, quot lucrantur aureos? Ordo terminorum hic erit.

Mercatores	8
aureis	1000
menſibus	2
Lucr. aureos	700
Mercatores	10
aureis	4000
menſibus	4
Quot Lucr. aur?	...

Deinde terminis primi membri per invicem multiplicatis, itemque membri tertii, quæſtio ad terminos reducetur tres; hunc in modum. 8 in 1000 ſunt 8000: quæ ducta in 2, faciunt 16,000: hic erit primus terminus. 10 in 4000 ſunt 40,000: hæc ducta in 4, faciunt 160,000: hic erit terminus tertius. Sic ergo ſtabit exemplum.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei	aur.
16,000,	700.	160, 000 ſunt	...

Demonſtratio

Rurſum manifeſta eſt. Nam ad lucrum perinde eſt, ſive dicas: 8 Mercatores, 1000 aureis; ſive 1 Mercator, 8000 aureorum. Rurſus

ſus perinde eſt, ſive dicas: 1 Mercator, 8000 aureorum, 2 menſibus; ſive 1 Mercator, 1 menſe, aureis 16, 000. Similiter in membro tertio perinde ad lucrum erit, ſive dicas; 10 Mercat., 4000 aur.; ſive 1 Mercator, 40, 000 aur.; & rurſum perinde eſt, ſive dicas 1 Merca., 40, 000 aur., 4 menſ., ſive 1 Mercator, 1 menſe, 160, 000, aur. Igitur per multiplicationem terminorum inter ſe, quæſtio ad hanc formulam reducta eſt.

Mercator	1
menſe	1
aureis	16000
Lucr. aureos	700
Mercator	1
Menſe	1
aureis	160,000
Quot Lucr. aur.?	....

In qua, quia quatuor termini, qui in primo, & tertio loco iidem ſunt, evaneſcunt, tota quæſtio à 7 terminis reducta eſt ad 3.

Compoſita everſa, ſeu reciproca.

Mirum eſt, quàm confusè, & imperfectè hæc regula paſſim tradatur, eâ credo de causâ, quod tam illius demonſtrationem, quàm diſcrimen a directâ non ſatis obſervaverint.

I. Quæſtio propoſita eſto terminorum ſex: 10 Homines expendunt 4 aureos diebus 3; Homines 100, aureos 2000, quot diebus expendent? Terminos eodem ordine, quo in directâ, collocabis. Tum ex indicio ſuperius

tradito deprehendes proportionem everſam, ſive reciprocam contineri in quæſtione; cum tam *a* circa *b*, quàm *d* circa *e* aliquid agat; Homines nimirum expendunt aureos. Perſpecto jam genere quæſtionis, accuratiùs adhuc terminor ſingulorum locus erit determinandus.

Homines	1
aureos	4
exp. dieb.	5
Homines	10
aureos	200
Quot dieb. exp? . . .	

Terminus agens *a*, qui non habet anne ſibi quæſtionem, primus eſto. Illius comes ſecundus. Tertius *c* ille ſit, qui ſolitarius & homogeneus quæſito. Quartus ſit age qui annexam habet quæſtionem, & primo mogeneus eſt, nempe *d*. Illius comes *e*, cundo *b* homogeneus, quinto loco conſiſt Ordine terminorum hunc in modum conſti to, generali artificio quæſtionem propoſita & alias ſimiles quaſcumque ſolvemus.

Termini primus *a*, tertius *c*, quintus *e* m tiplicentur per invicem, & gignant *a* Deinde ſecundus *b* ducatur in quartum *d*, & faciat *b d*: productum ſecundum *b a* dividat primum productum *ace*. Quoniam A dabit terminum incognitum, qui petebatur.

A

Demonſtratio.

REponatur quinto loco idem terminus, ſecundo, ut ſit quæſtio. Si 10 Homi 4 aureo

4 aureos expendunt, diebus 3; Homines 100, etiam 4 aureos, quot diebus expendent?

Homines 10. a
aureos 4. b
Exp. dieb. 3. c

Homines 100 d
aureos 4. b
Quot dieb. exp? ....

Quoniam hic duo termini identici ſunt, ac proinde evaneſcunt; manifeſtum eſt, quinque terminos redactos eſſe ad tres, *a*, *c*, *d*,

Qui cum indicio tradito Cap. I. proportionem everſam contineant, quartus per regulam trium ſimplicem everſam reperiendus eſt. Primus igitur *a* in ſecundum *c*, faciat *ac*: quo diviſo per tertium *d*, quotiens B eſt quartus: ac proinde 100 homines 4 aureos expendent, diebus B. Littera B porro deſignat fractionem ſpecioſam, quæ typis commodè interſeri non poteſt; quod etiam deinceps nota.

$$B\,\frac{a\,c}{d}$$

Homines 100. d
Aureos 4. b
Exp. dieb. $B\,\frac{a\,c}{d}$

Homines 100. d
Aureos 2000. e
Quot dieb. exp.? ....

Quoniam igitur 100 Homines 4 aureos e
pendunt diebus B; iidem 100 Homines, 2c
aureos *e*, quot diebus expendent? Quoni
hic rurſum duo termini identici ſunt, con
terminos quinque redactos eſſe ad tres *b*,
e: qui cum ex indicijs jam traditis propor
nem directam contineant, incognitus per ſ
plicem directam proportionum regulam in
niri debet. Itaque ſecundus, nempe frac
ſpecioſa, per B deſignata, ducatur in terti
e, ut traditur l. II. cap. VI. num. II.;
& gignat D, hoc eſt fractionem, a
per D deſignatam: qua diviſâ per D
primum *b*, ut traditur lib. II. Cap.
VII. n. II, (multiplicantur enim
fractiones ſpecioſæ, ut vulgares) prov
quotiens E, indicans 100 Homines, 2000
reos, quot diebus expendant:
ac proinde E eſt terminus ille in- ac
cognitus, qui in quæſtione initio E —
propoſitâ quærebatur. Atqui eſt bd
idem cum A, ex vi conſtructio-
nis invento. Ergo A eſt terminus incogni
quæſitus. *Q. E. D.*

II. Propoſita ſit quæſtio terminorum oc
vel plurium. Scriptores 4, paginas 250,
nearum 20, ſcribunt diebus 8: igitur Scrip
res 6, paginas 350, linearum 25, quot d
bus ſcribent? Quo-
niam tam in primo, Scriptores. 4
quàm tertio membro Scrib. pag. 250.
unus terminus ali- Verſuum 20
quid agit circa alium,
nimirum *a* circa *b*, Diebus 8.
& *d* circa *e*; liquet,

in

in quæſtione proportionem reciprocam contineri. Ordo igitur terminorum idem erit, qui ſupra: nimirum terminus agens *a*, non habens annexam ſibi quæſtionem, primus erit: hunc comites ejus *b*, & *m* ſequentur. Medium locum tenebit *c*, qui ſolitarius eſt, & termino incognito homogeneus. Huic proximus erit *d* agens alter, qui annexam habet quæſtionem, quem *e*, *n* ejus comites ſubſequentur. Ordine ſic conſtituto. Primò *a* ductus in medium *c*, & proximo *d* prætermiſſo, in omnes illius comites *e*, *n*, producat *a c e n*. Tum *d* ille jam prætermiſſus ductus in omnes comites primi *a*, nempe in *b*, *m* producat *d b m*. Deinde productum primum *a c e n* dividatur per ſecundum *d b n*. Quotiens P dabit numerum incognitum, qui quærebatur.

Scriptores	6. d
Paginas	350. e
Verſuum	25. n
Quot dieb. ſcr?	

$$P \frac{acen}{dbm} \frac{1}{9} \frac{}{3}$$

		Scriptores	6. d
		Scrib. pag.	350. e
Verſuum	20. m		
Diebus	$A \frac{ace}{bd}$		

		Scriptores	6. d
		Scrib. pag.	350. e
Verſuum	25. n		
Quot dieb. ſcr?			

T 3 *Demon-*

Demonſtratio.

SI tertius terminus *m* ponatur etiam loco ſeptimo pro *n*, quæſtio redigetur ad terminos quinque *r*, *b*, *c*, *d*, *e*, cujus terminus incognitus, ut jam demonſtratum eſt num. 1, erit A:

$$A \frac{a\,c\,e}{d\,b}$$

ac proinde Scriptores 6, paginas 350, linearum *m* 20, ſcribent diebus A; igitur iidem 6 Scriptores, paginas etiam 350, ſed linearum *n* 25, quot ſcribent diebus? hìc quia utrimque *d*, *e* numeri Scriptorum, & paginarum iidem ſunt: quæſtio redacta eſt ad terminos tres, nimirum *m*, A, *n*, quæ quia directa eſt, duc A in *n*, ut traditur L. II. Cap. VI. num. II., & fiet Q. Quo diviſo per *m*, ut traditur L. II. C. VII. nu. II. fiet quotiens R, indicans Scriptores 6 paginas 350 linearum 25, quot diebus abſolvant; ac proinde eſt is, qui petebatur. Cum igitur R idem ſit cum P, erit P numerus incognitus, in quæſtione requiſitus. *Q. E. D.*

$$Q \frac{a\,c\,e\,n}{d\,b}$$

$$P \frac{a\,c\,e\,n}{d\,b\,m}$$

$$R \frac{a\,c\,e\,n}{d\,b\,m}$$

Scholium.

QUæſtiones ad regulam compoſitam proportionum, tam everſim, quàm directam pertinentes per regulam ſimplicem proportionum bis inſtitutam ſolvi poſſe, quamvis inutili circuitu, ex demonſtrationibus jam allatis manifeſtum eſt; compoſitam videlicet directam,

per

per directam ſimplicem duplicatam; everſam verò, per ſimplicem everſam unam, & ſimplicem directam alteram. Id porro, haud ſcio, an ſatis fuerit ab Arithmeticis obſervatum, poſſe everſam compoſitam ſolvi per ſimplices duas, everſá nullá interveniente: quod ſic oſtendó.

Reſumatur quæſtio ſupra numer. 1. propoſita.

Homines 10
Aureos 4
Exp. diebus 3
Homines 100
Aureos 2000
Quot dieb. exp? ..

Ex qua deſumatur prima quæſtio ſimplex hujuſmodi: Homines 10, diebus 3, expendunt aureos 4; homines ergo 100, diebus etiam 3, quot expendent aureos? formulam hic appoſui, quam patet eſſe directam. Solutione adhibitâ, quartus provenit aurei 40. Altera jam quæſtio ſit etiam ſimplex:

Homines 10
diebus 3
Exp. aureos 4
Homines 100
diebus 3
Quot aur. exp? ...

Homines 100 expendunt aureos 40, diebus 3; ergo iidem Homines 100, aureos 2000, quot diebus expendunt? Formulam inſpice hic appoſitam, quam iterum patet eſſe directam. Solutione adhibitâ, provenient dies 150 pro numero incognito quæſito. Et poterunt quæſtiones omnes everſæ com-

Homines 100
aureos 40
exp. dieb. 3
Homines 100
aureos 2000
Quot dieb. exp? ....

compoſitæ in hunc modum ſolvi. Simili modo etiam demonſtrari poteſt, compoſitas directas ſolvi poſſe per unam directam ſimplicem, & everſam alteram.

Hæc ad plenam regulæ trium compoſitæ intelligentiam dicta ſint. Cæterum inutilis ad praxim ille per duplicatam ſolutionem ſimplicem circuitus eſt, quando ſolutionem expeditiorem longè, ac breviorem jam tradidimus.

CAP. III.

Regula Societatum

DOcet numerum in partes dividere, datis numeris proportionales. Nomen ſortita eſt a ſocietatibus mercatoriis, in quibus uſum habet permagnum. Sic verò inſtituitur.

Datorum ſumma primum locum teneat; ſecundum numerus diſtribuendus; tertium ſinguli datorum. Exerceatur deinde toties regula trium, quot ſunt dati. Numeri inventi ſatisfacient quæſtioni. Si numeris datis temporum diverſitas ſit adjuncta; prius in ſuum ſinguli tempus ducantur, quàm ad unam ſummam redigantur.

Quæſtio I.

TRes Mercatores, initâ ſocietate, lucrati ſunt aureos 4500. Primus expoſuit aureos 100, alter 150, tertius 200. Quantum ex lucro communi cuique debetur?

Manifeſtum eſt, lucra ſingulorum debere pecuniis in ſortem collatis eſſe proportionalia; adeo-

adeoque lucrum commune 4500 aur. dividendum in partes, pecuniis collatis ſingulorum proportionales.

Sic igitur quæſtio ordinabitur.

		Dati	quæſiti
Summa dat.	Lucr. com.	100 c.	1000 f.
450.	4500	150 d.	1500 g.
a	b	200 e.	2000 h.

Tum quære, ſi 450 aurei lucrantur aureos 4500; ſinguli dati, hoc eſt pecuniæ, a ſingulis in ſortem datæ quot lucrantur aureos? Regulâ trium ter inſtitutâ, provenient quæſiti. Conferenti 100 debentur 1000, conferenti 150 debentur 1500, & 2000 ei, qui 200 contulit.

Demonſtratio.

Ex vi conſtructionis, ut *a* eſt ad *b*, ſic *c* eſt ad *f*, & ſic *d* eſt ad *g*, & ſic *e* eſt ad *h*; Ergo per XI. L. VI. *c* eſt ad *f*, ut *d* eſt ad *g*, & ut *e* eſt ad *h*. Igitur permutando per XVI. L. V., ut *c* eſt ad *d*, ſic *f* eſt ad *g*; & ut *d* eſt ad *e*, ſic *g* eſt ad *h*; & ex æquo per XXII. Lib. V. *c* eſt ad *e*, ut *f* ad *h*. Conſtat ergo fides operationis.

Quæſtio II.

TRes Mercatores lucrati ſunt aureos 9000. Primus contulit aureos 100 per menſes 15; ſecundus 140 per menſes 10; tertius 300

per-

per menſes 7. Quantum ſingulis debetur?

Aurei a ſingulis collati ducantur in tempora, & numeri producti 1500, 1400, 2100 in unam colligantur ſummam 5000. Quæſtio deinde ſic ordinabitur.

		Dati	Quæſiti
Sum. dat.	Lucr. com.	1500	2700
5000	9000	1400	2520
		2100	3780

Demonſtratio eadem, quæ ſupra. Quod autem multiplicatio pecuniæ in tempus valorem datorum non immutet; patet ex demonſtratione regulæ trium compoſitæ directæ Capitis præcedentis.

CAP. IV.

Regula Alligationis.

DOcet hæc regula, res diverſi pretii ita commiſcere, ut mixtum habeatur pretii medii, pro arbitrio aſſignati. Sint duo genera argenti non puri, primi libra 1 valeat aureis 30, alterius 24. Scire cupio, quantum ex utroque ſumere debeam, ut mixti una valeat aureis 28; vel ut habeam mixti libras 10, quarum una valeat aureis 28. Hic pretia data ſunt 30, & 24; arbitrarium medium 28. Id numquam eſſe poteſt utroque dato majus, vel dato utroque minus; ſed medium inter illa, aut alterutri æquale.

I. Si duo ſolum ſint pretia data diverſa 30, 24, ea ſcribe ſub invicem, medium vero 28

ad

ad ſiniſtram. Tum pretia data alligentur inter ſe, hoc eſt comparentur ambo cum medio 28, ut duæ habeantur differentiæ, nimirum exceſſus 2 majoris dati 30 ſupra medium 28, quem ad dexteram minori dato 24 adſcribes; & defectus 4 minoris dati 24 a medio, quem adſcribes dato majori 30. Quæ omnia in formulâ hîc appoſitâ exhibentur.

Pret. med.	Pret. mix.	Differ
	30	4
28	24	2
		6
		Sum. differ.

His peractis, regula proportionum inducitur toties, quot ſunt pretia data. In eâ primum locum tenebit ſumma differentiarum 6: ſecundum quantitas, ſive numerus mixti lib. 10: tertium ſingulæ differentiæ. Numeri inventi ſolvent queſtionem.

Sum. differ.	Mixti		
		Differ. 4.	lib. $6\frac{2}{3}$ — A
6	lib. 10.		
		Differ. 2.	lib. $3\frac{1}{3}$ — B

Igitur ex pretii majoris 30 aureorum argento accipiendæ ſunt libræ A; ex pretii minoris

libræ

libræ B; quæ ſimul efficiunt 10 libras argenti mixti, cujus pretium ſit medium, aureorum nempe 28.

II. Cum plura, quàm duo, pretia dantur; ſingula binatim inter ſe alligentur, his tamen legibus ſervatis. I. Quæ alligantur, neque ſimul majora ſint pretio medio, neque ſimul minora. II. Exceſſus majoris pretii dati ſupra medium adſcribatur minori pretio; defectus autem minoris a medio apponatur majori.

III. His ſalvis, perinde eſt quocumque ordine inter ſe data pretia alligentur; & poteſt unum alligari ſæpius, hoc eſt cum diverſis, modo ſingula ſaltem alligentur ſemel. Unde fit, ut eadem quæſtio multas ſolutiones admittat, ut infra demonſtrabitur.

Alligationibus peractis, regula proportionum, ut ſupra, toties exercebitur, quot pretia ſunt data. In eâ primum locum teneat ſumma differentiarum, ſecundum quantitas, ſeu numerus mixti, tertium differentiæ ſingulæ, aut, ſi uni pretio plures ſunt adſcriptæ, ſummæ earum ſingulæ.

Exemplum.

Libra 1 Garyophilli valet juliis 3, Piperis 4, Cinnamomi 6, Zingiberis 8, Croci 10. Quantum ex ſingulis debeo accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7? vel ut habeam mixti libras 12, quarum una valeat juliis 7?

Pret.

		Pret. data	Differ.
	Garyoph.	a 3.	1. 3
Mixti Pret. med.	Piperis	b 4.	3. 1
7	Cinnam.	c 6.	1. 3
	Zingib.	d 8.	4. 3. 1.
	Croci	e 10.	4. 3. 1.

	Differ.	Quæſit.
	4?	$\frac{4}{28}$ m
Sum. diff. Mixti. 28. lib. 1.	4?	$\frac{4}{28}$ m
	4?	$\frac{4}{28}$ m
	8?	$\frac{8}{28}$ n
	8?	$\frac{8}{28}$ n

In hoc exemplo factæ ſunt omnes alligationes poſſibiles, quæ ſunt *ad*, *ae*, *be*, *bd cd*, *ce*. Igitur Garyophilli, Piperis, Cinnamomi ex ſingulis partes *m* unius libræ, & Zingiberis, ac Croci etiam ex ſingulis partes *n* unius libræ, dabunt mixti libram 1, pretii 7 Juliorum.

Hoc porro exemplum, præter ſolutionem jam datam, alias admittit, ut infra oſtendetur. Accipe unius adhuc ſolutionis formulam. Alligationes ſunt, *ad*, *bd*, *ce*

Pret.

		Pret. data	Differ.
Mixti	Garyoph.	a 3.	1.
Pret. Med.	Piperis	b 4.	1.
7	Cinnam.	c 6.	3.
	Zingib.	d 8.	4. 3.
	Croci	e 10.	1.

	Differ.	Quæſit	
	1 ?	$\frac{1}{13}$	f
Sum. diff. Mixti	1 ?	$\frac{1}{13}$	f
13. lib. 1.	3 ?	$\frac{3}{13}$	p
	7 ?	$\frac{7}{13}$	q
	1 ?	$\frac{1}{13}$	f

Quæſiti *f*, *f*, *p*, *q*, *f* indicant, quot partes libræ ex ſingulis acceptæ conficiant mixti libram unam, pretii medii 7 Juliorum.

Examen ita fiet. Si Garyophilli una libra valeat 3 Juliis, libræ pars *f* quantum valebit? Rurſum ſi 1 libra piperis, &c. Pretia per regulam trium inventa collige in unam ſummam, hæc pretio medio æqualis erit, ſi bene fueris operatus.

Demon-

Demonſtratio, cum duo tantùm pretia diverſa ſunt alliganda:

Differ. croci
2. e

Pip. 4. a

Mixti
Pret. medium
7. c

Diff. Pip.
3. d

Croci 9. b

5. f
Sum. differ.

Quæſtio ſit: libra 1 piperis valet 4 Juliis, libra croci 9; quantum ex utroque ſumere debeo, ut libra 1 mixta valeat Juliis 7? Cum ad ſolvendam quæſtionem in regulâ trium primus locus debeatur ſummæ differentiarum, ſecundus numero mixti, ſive ejus quantitati, tertius ſingulis differentiis reciprocè collocatis; demonſtrandum eſt, totius mixti quantitatem, ſeu numerum, libram ſcilicet 1 ita eſſe ad croci, qui in mixto eſt, quantitatem, ſeu numerum incognitum; ut *f* ſumma differentiarum eſt reciprocè ad *d* differentiam piperis a pretio medio. Quod fiet hunc in modum.

Exceſſus *e* pretii unius libræ croci ſupra pretium medium unius libræ mixti preciſè oritur a pipere, quod eſt in mixto: & defectus *d* pretii unius libræ mixti præciſè oritur a croco, qui eſt in mixto. Ergo exceſſus *e* pretii unius libræ croci eſt ad defectum *d* pretii unius libræ piperis, ut reciprocè piper, quod eſt in mix-

to,

to, ad crocum, qui eſt in mixto. Ergo componendo, ut e cum d eſt ad d, exceſſus nimirum croci cum defectu piperis ad piperis defectum; ita piper cum croco in mixto, hoc eſt tota mixti quantitas, libra nempe una eſt ad quantitatem croci in eodem mixto. *Q.E.D.*

Demonſtratio univerſalis, ſive duo tantum pretia, ſive quotlibet ſint alliganda.

HAnc rem non eſſe demonſtratu facilem, apparebit (niſi fallor) ex iis, quæ hic ſubjungam. Quæ attulere nonnulli, nullam demonſtrationis ſpeciem habent, ut ne ſciviſſe quidem videantur, in quo difficultas conſiſteret, aut quid demonſtrandum ſibi eſſet. Utar porro, quod jam feci ſæpius. Logiſticâ ſpecioſâ, quæ huic rei demonſtrandæ conducet plurimum. Quare hæc iis ſcribo, qui jam in eâ utcumque ſunt verſati.

Schema I.

	4. b	}	e — a
	6. c	}	d — a
7.a	8. d	}	a — c
	9. e	}	a — b

I. Rerum quatuor miſcendarum pretia diverſa ſint b, c, d, e; pretium medium ſit a. Exceſſus e ſupra a eſt $e - a$; ex præcepto regulæ adſcribendus minori b. Defectus b ab a eſt $a - b$, apponendus majori e. Exceſſus d ſupra a eſt $d - a$, quem adſcribe minori c. Defectus c ab a eſt $a - c$, quem appone majori d. Valebit porro jam afferenda demonſtratio, quocumque tandem ordine, ſervatis tamen præſcriptis in regulâ conditionibus, inter ſe pretia diverſa alligentur.

II. Ma-

II. Manifeſtum eſt, in qualibet differentiâ per exceſſum negari *a* pretium medium, affirmari verò pretia majora data *e*, *d*; quod ita exprimitur *e*—*a*, hoc eſt *e* minus *a*; *d*—*a*, hoc eſt *d* minus *a*. Rurſum patet, in omni differentiâ per defectum affirmari *a* pretium medium, negari verò pretia data minora *b*, *c*; quod ſic exprimitur *a*—*c*, *a*—*b*. Sed quia ex præſcripto regulæ pretiorum, quæ alligantur, ſemper unum majus eſt pretio medio, alterum minus, aut certè æquale; tot ſemper erunt differentiæ, quot pretia majora, & minora.

F

e—a+d—a+a—c+a—b

medio: quæ ſi in unam ſummam F colligantur, hæc duo infallibiliter evenient. Primò litteræ, pretia medio *a* majora deſignantes, ſemper reperientur affirmatæ: litteræ verò totidem, deſignantes pretia medio *a* minora, ſemper negatæ. Secundò *a*, medium pretium deſignans, toties negata reperietur, quoties affirmata; negata quidem in differentiis majorum pretiorum: affirmata verò in differentiis pretiorum minorum: ac proinde litteris *a* ſe mutuo tollentibus differentiarum ſumma erit G, conſtans ſemper litteris, data pretia deſignantibus.

G

e+d—c—b

III. Ut verò ſciatur, quantum ex ſpeciebus ſingulis diverſorum pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* ſumi

 debeat,

debeat, ut ex iis permixtis una libra valeat pretio medio *a*; ex regulæ præſcripto ponitur primo loco ſumma differentiarum, ſecundo 1 libra, tertio ſingulæ differentiæ; ac tum

Sum. diff.	lib.	Different.	*Schema II.*
		$e-a$	$\frac{e-a}{e+d-c-b}$ P ex b
		$d-a$	$\frac{d-a}{e+d-c-b}$ Q ex
$e+d-c-b$	1		
		$a-c$	$\frac{a-c}{e+d-c-b}$ R ex
		$a-b$	$\frac{a-b}{e+d-c-b}$ S ex

per regulam trium inveniuntur quarti propor-tionales P, Q, R, S. Qui quidem, quòd ſe-cundus terminus ſit unitas exhibentur, divi-dendo ſolum differentias ſingulas per diffe-rentiarum ſummam. Itaque quarti illi propor-tionales P, Q, R, S ſunt fractiones, quarum communis denominator eſt differentiarum ſumma $e+d-c-b$, numeratores verò diffe-rentiæ ſingulæ, eo ipſo ordine, quo num. fuere alternatim pretiis diverſis *b*, *c*, *d*, *e* ap-poſitæ.

IV. Nunc, quia in regulâ aſſeritur, P, Q, R, S indicare, quantum ex ſpeciebus ſingul diverſorum pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* ſumi debea ut una libra, ex iis mixta, valeat pretio med *a*; utrumque oſtendi debet, P, Q, R, S e

ficere

ſioere unam libram, & P, Q, R, S ſimul valere pretio medio *a*. Primum patet ex XXIV. Lib. V. Nam ex conſtr. ſumma differentiarum eſt ad ſingulas differentias, ut 1 libra ad ſingulas, P, Q, R, S. Ergo, ut ſumma differ. eſt ad omnes ſimul differentias, ita una libra eſt ad omnes ſimul P, Q, R, S. Atqui ſumma differ. æquatur differentiis ſimul omnibus. Ergo etiam 1 libra omnibus P, Q, R, S æqualis eſt.

V. Alterum verò, in quo præcipua difficultas eſt, cujus gratiâ ſuperiora omnia num. I. II. III. præmiſimus, ſic oſtendo. Ut inveniantur pretia, ſeu valores ſingulorum P, Q, R, S; ſtatuatur in regula trium pro loco I. libra 1; ſecundo *b*, *c*, *d*, *e* pretia diverſa ſingularum ſpecierum; tertio ſingula P, Q, R, S, & dic: ſi 1 libra ſpeciei primæ valeat florenis *b*; unius libræ pars, à P deſignata, quantum valebit? & ſic in aliis.

Schema III.

lib. 1.

$$4.b \quad \frac{e-a}{e+d-c-b}\,P \qquad \frac{be-ba}{e+d-c-b}\,V$$

$$6.c) \quad \frac{d-a}{e+d-c-b}\,Q \qquad \frac{cd-ca}{e+d-c-b}\,T$$

$$8.d) \quad \frac{a-c}{e+d-c-b}\,R \qquad \frac{da-dc}{e+d-c-b}\,X$$

$$9.e \quad \frac{a-b}{e+d-c-b}\,S \qquad \frac{ea-eb}{e+d-c-b}\,Z$$

$$\frac{ea+da-ca-ba}{e+d-c-b}\,N$$

Quoniam verò in primo loco habetur unitas, ut inveniantur quarti V, T, X, Z, oportebit ſolùm ſingula *b*, *c*, *d*, *e*, pretia ducere in ſingulos fractionum P, Q, R, S, numeratores, qui, ut oſtendi num. III., ſunt ipſæ pretiorum differentiæ, iiſque ſupponere communem denominatorem *e*+*d*—*c*—*b*, quem oſtendi n. III. eſſe differentiarum ſummam. Nunc fractiones ipſas V, T, X, Z jam inventas expendamus. Si harum numeratores in unam ſummam colligamus, reperiemus, eas particulas, in quibus *a* pretium medium deſignans non reperitur, ſe mutuò tollere: quod ſic oſtendo. Ut habeatur numerator ipſius V, nempe *be*—*ba*, pretium *b* ducitur in numeratorem ipſius P, hoc eſt in differentiam, quæ in ſchemate primo ipſi *b* fuit appoſita: ea autem erat differentia pretii majoris *e*, nempe *e*—*a*, in qua, ut oſtendi num. II., reperitur +*e*, hoc eſt *e* pretium majus affirmatum. Ergo in numeratore ipſius V neceſſariò reperitur +*be*, hoc eſt *be* affirmatum. Rurſum, ut habeatur numerator ipſius Z, ducitur pretium majus *e* in numeratorem ipſius S, hoc eſt in differentiam *a*—*b*, quæ ipſi *e* in I. ſchemate fuit appoſita: ea autem eſt differentia pretii minoris *b*, in qua, ut num. II. oſtenſum eſt, reperitur—*b*, hoc eſt pretium minus *b* negatum. Ergo in numeratore ipſius Z neceſſariò reperitur eadem particula *be*, quæ in V; ſed jam negata, hoc eſt—*be*. Ergo in V, & Z duæ particulæ+*b*

Sche-

Schema III.

4.b	$\frac{e-a}{e+d-c-b}$ P	$\frac{be-ba}{e+d-c-b}$ V	
6.c) 2.lib. }	$\frac{d-a}{e+d-c-b}$ Q	$\frac{ed-ca}{e+d-c-b}$ T	
8.d	$\frac{a-c}{e+d-c-b}$ R	$\frac{da-dc}{e+d-c-b}$ X	
9.e	$\frac{a-b}{e+d-c-b}$ S	$\frac{ea-eb}{e+d-c-b}$ Z	
		$\frac{ea+da-ca-ba}{e+d-c-b}$ N	

&—*be*, in quibus *a* non reperitur, ſe mutuò tollunt. Eodem modo oſtendam, in numeratoribus fractionum T, & X particulas, in quibus non eſt *a*, (ſunt eæ hìc +*cd*, &—*dc*,) ſe invicem ſimiliter tollere.

Itaq; ſumma numeratorum in V, T, X, Z eſt *ea+da—ca—ba*, in cujus particulis ſingulis reperitur *a*: huic ſummæ ſi ſubſcribatur communis denominator *e+d—c—b*, erit fractio N par omnibus V, T, X, Z. Deinde, quia genita eſt ſumma hæc *ea+da—ca—ba*, pretia majora *e*, *d* ducendo in ſibi appoſitas pretiorum minorum differentias *a—c*, & *a—b*, in quibus ut oſtenſum num. H. *a* affirmatur, patet in particulis hujus ſummæ, ſigno + affectis, neceſſariò reperiri pretia majora *e*, *d*. Pari modo, quia in procreatione hujus ſummæ *ea+da—ca—ba* pretia minora *c*, *b* ducta ſunt

in appoſitas ſibi pretiorum majorum differentias $e - a$, & $d - a$, in quibus oſtendi ſupra num. II. a negari, manifeſtum eſt in particulis hujus ſummæ, quæ eſt numerator ipſius N, ſigno − affectis, neceſſariò reperiri pretia minora c, b. Ergo in numeratore ipſius N pretia majora e, d reperientur affirmata; minora verò c, b negata. Atqui ſupra num. II. oſtenſum eſt; etiam differentiarum ſummam $e + d - c - b$, quæ eſt fractionis N denominator, conſtare pretiis majoribus e, d affirmatis; minoribus vero c, b negatis. Ergo in fractionis N numeratore reperiuntur eædem litteræ, & iiſdem ſignis affectæ, quæ in denominatore. Ergo ſi numerator dividatur per denominatorem, quotiens erit a. Si enim denominator ducatur in a, reſtituetur idem numerator. Ergo fractio N æquivalet ipſi a pretio medio. Atqui jam oſtendi N æquari omnibus V, T, X, Z, valoribus ipſorum P, Q, R, S. Ergo P, Q, R, S ſimul valent pretio medio a. *Q. E. D.*

Quot ſolutiones diverſas eadem quæſtio admittat juxta praxim jam traditam.

ARithmetici Scriptores plerique afferunt, pretia data diverſimodè alligari poſſe, ac proinde eamdem quæſtionem plures ſolutiones admittere. Sed quantus ſolutionum diverſarum ſit numerus, & quo artificio illæ omnes exhibeantur, altum apud illos ſilentium eſt. Nimirum, ut demonſtrationem ipſam hujus regulæ, ita & determinationem ipſius pulcherrimam,

mam, aut ignorarunt, aut certè immeritò neglexerunt.

Ejuſdem igitur quæſtionis ſolutiones omnes poſſibiles invenientur hunc in modum.

I. Vide quoties pretia data inter ſe binatim poſſint combinari diverſimodè; hoc eſt inveniantur omnes diverſi biniones, qui ex datis pretiis haberi poſſunt, ut trademus L. V. C. VIII. In quæſtione num. II. ſupra quinque dantur pretia a, b, c, d, e, quorum biniones diverſi ſunt 10.

II. Vide, quot ex his binionibus ſint apti ad alligandum: ad quod requiritur, ut binionis utrumque membrum, neque ſimul majus ſit, neque ſimul minus pretio medio. Ex 10 binionibus quæſtionis, ſupra datæ, tantùm ſex apti ſunt; nimirum ad, ae, be, bd, ce, cd.

III. Vide, quis minimus ſit alligationum numerus, ad quæſtionem ſolvendam neceſſarius. Si multitudo pretiorum datorum par eſt, ejus ſemiſſis dabit minimum numerum alligationum. Si impar, ejus ſemiſſis, unitate aucta. Ratio eſt, quia ſingula pretia data ſaltem alligari debent ſemel. In exemplo noſtro, quia 5 pretia dantur a, b, c, d, e, minimus alligationum numerus, quo ſolvi quæſtio poteſt, eſt 3.

IV. Inſpice biniones aptos, num. II. inventos, & quære omnes eorum diverſos terniones, & omnes eorum diverſos quaterniones, & ſic deinceps, incipiendo a minimâ ſpecie, num. III. inventâ, uſque ad proximè minorem numero aptorum binionum, ut tradetur L. V. C. VIII. In exemplo noſtro, quoniam biniones apti ſunt ſex, num. II. reperti; oportebit, omnes eorum diverſos reperire terniones, qui

ſunt 20; & quaterniones, qui ſunt 15; & quinterniones, qui ſunt 6.

V. Inquire, quot ex binionum aptorum ternionibus, & quaternionibus &c. ſint apti ſolvendæ quæſtioni. Illi porro erunt apti, in quibus ſingula pretia data *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, reperiuntur; inepti, in quibus aliquod eorum deeſt. Singuli horum inventorum ternionum, quaternionum, &c. ſingulas dabunt quæſtionis datæ ſolutiones, quibus eam adde, quam exhibet tota binionum aptorum ſumma. Præter has, nullæ erunt alligationes aliæ poſſibiles.

In exemplo noſtro pretia dantur quinque, quæ artificio, jam explicato, comperies alligari poſſe modis diverſis 25, ac totidem proinde exhiberi poſſe quæſtionis datæ ſolutiones.

Al-

Alligatio.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
ad	ad	ad	ae	ae	ae
bd	be	be	cd	bd	be
ce	cd	ce	bd	ce	cd

7.	8.	9.	10.	11.	12.
ad	ad	ad	ad	ad	ad
ae	ae	ae	ae	bd	bd
bd	bd	bd	be	be	be
cd	ce	cd	ce	cd	ce

13.	14.	15.	16.	17.	18.
ad	ad	ae	ae	ae	ae
bd	be	bd	bd	bd	be
cd	cd	be	be	cd	cd
ce	ce	cd	ce	ce	ce

19.	20.	21.	22.	23.	24.	
ad	ae	bd	be	cd	ce	ad
ae	bd	be	cd	ce	ad	ae
bd	be	cd	ce	ad	ae	bd
be	cd	ce	ad	ae	bd	be
cd	ce	ad	ae	bd	be	cd
						ce

Dixi ſupra in titulo hujus diſcurſus, *juxta praxim hactenus traditam*. Itaque, cum dicitur, præter ſolutiones, dicto modo inventas nor plures eſſe poſſibiles, intellige ſi utamur mo alligationis conſueto, qui ſupra num. II. t tus eſt. Aliàs quæcumque quæſtio ad re alligationis pertinens, in qua plura duo

tia dantur, ſolutiones admittit infinitas. Quod ſic demonſtro.

Reſumatur quæſtio ſuperior, in qua ex pretiis datis ſeligatur pro arbitrio unum pretio medio minus, puta *a*, cum quo reliqua *b*, *c*, *d*, *e*, tanquam unum, comparentur.

			Differ.
		a. 3	2
Mixti		b. 4	
Pret. med.		c. 6	f
7.		d. 8	9 4
		e. 10	

Accipiatur quivis numerus *f* major, tum minimo ipſorum *b*, *c*, *d*, *e*, tum etiam medio 7; minor verò *e* maximo ipſorum. Ex regulâ alligationis, jam traditâ liquet, res pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* ita miſceri poſſe, ut una libra mixti ex illis valeat pretio *f*, 9 Juliis. Pro ſpeciebus igitur *b*, *c*, *d*, *e* ſumatur ex iis mixtum, cujus una libra valeat pretio *f*. Tum per regulam alligationis ſimplicem, numero 1. traditam, inveniatur mixtum *x*, *z* ex *f*, & *a*, cujus una libra valeat pretio medio 7. Liquet igitur, *x*, *z* libram eſſe mixti ex omnibus datis *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; cum *x*, *z* mixtum ſit ex *a*, & *f*, *f* autem mixtum ex *b*, *c*, *d*, *e*. Atque ita

			Differ.
		a. 3	2
Mixti			
Pret. med.		b. 4	
7.		c. 6	f
		d. 8	9 4
		e. 10	

$$2\ \frac{2}{6}\ x$$

6. lib. 1.

$$4\ \frac{4}{6}\ z$$

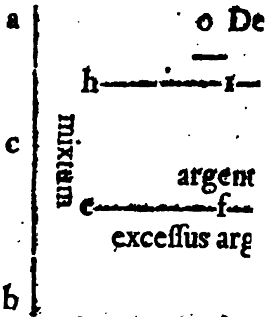
per

per aſſumptum numerum *f* majorem, c
nimo ipſorum *b*, *c*, *d*, *e*, tum ipſo medi
ncrem verò *e* maximo, una habetur
quæſiti nis, quæ toties variabitur, quoti
f alius ejuſmodi medius aſſumetur div
Atqui tales medii diverſi aſſumi poſſun
hibitis fractionibus, infiniti. Ergo q
nis datæ ſolutio variabitur infinities
Q. E. P.

Furtum Aurifabri in coronâ Hiero Regis detectum.

CUm Hiero Syracuſarum Rex c
auream Diis voviſſet, & Aurifab
latâ portione auri, argenti tantunden
miſſet, fraus ab Archimede detecta
quo præciſè artificio, non ſatis conſta
ſunt modi: qui regulâ alligationis mi
nium facillimus eſt.

Referant *a* *b*, *cd*, *bg* tres maſſas metalli ſingulas lib. 10; & ſit aurea *bg*; *cd* argentea; *ab* verò ea, de qua dubitatur, an mixta ſit ex auro, & argento.



Primò invenienda eſt ex Hydroſta
cipiis trium maſſarum proportio quo
ad quod minimè opus eſt, ut de fact
tur maſſæ, aurea, & argentea, uti in

tica, ſi Deo placuerit, oſtendam. Quod ſi moles *ab* media reperiatur inter auream *gh*, & argenteam *ed*, certum erit in *ab* admixtum eſſe argentum: qua verò proportione, per alligationis regulam innoteſcet.

Eſt enim, ut differentiarum ſumma *k*, *o* ad *o* differentiam, ſeu defectum molis aureæ *h g* à mixta *ab*; ita 10 libræ mixti *ab* ad libras argenti in *ab*.

Id verò eodem modo demonſtratur, ut ſupra. Nam *k* exceſſus in mole argenti ſupra mixtam *ab* præciſè oritur ab auro, quod eſt in mixto; & defectus auri *h g* à mixto præciſè oritur ab argento, quod eſt in mixto. Ergo *k* exceſſus argenti *e d* eſt ad *o* defectum auri *h g*, ut reciprocè quantitas, ſeu pondus auri in 10 libris mixti *ab* eſt ad pondus argenti in eodem mixto. Igitur componendo totum mixti pondus argenti, nempe 10 libræ, eſt ad pondus argenti in mixto, ut *k* cum *o*, hoc eſt differentiarum ſummâ, eſt ad *o* auri defectum. *Q. E. P.*

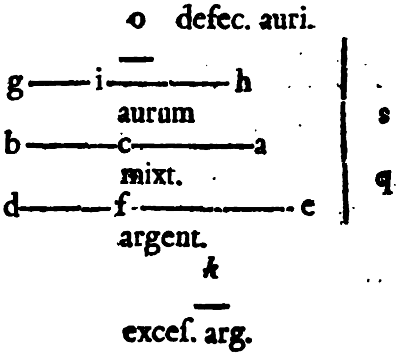
Si ergo *k* ponatur eſſe ad *o*, ut 15 ad 1, per regulam trium deprehendetur in *ab* maſſa 10 libr. eſſe unius libræ argenti 5 octavas.

Quod ſi detur mixtum ex metallis tribus, aut pluribus; nullo artificio deprehendi poterit, qua proportione ſint commixta, quod ea poſſit infinities variari, ut demonſtravi ſupra.

Alia Demonſtratio.

QUamvis demonſtratio jam allata mihi videatur clariſſima eſſe; atque id ipſum pateat ex demonſtratione univerſali ſupra: tamen quod in hac re demonſtrandâ nobiles

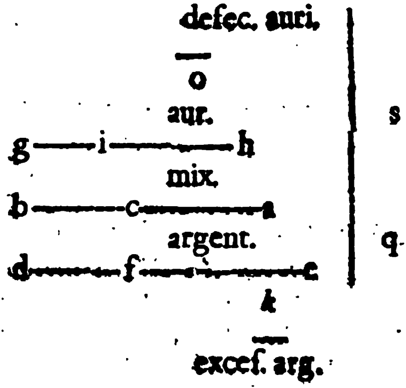
biles Geometræ, & inprimis Marinus Ghetaldus in Archimede promoto, laborarint, viſum eſt hoc ipſum alio modo, & faciliori, quàm ſit ille Ghetaldi, demonſtrare.



Argentum in mixto AB repræſentet CB aurum CA. Tum in argenteâ mole DE intelligatur DE par BC; in aureâ verò HI par AC. Quoniam ex hypotheſi DE excedit AB per *K*; ablatis utrimque æqualibus DF, BC, etiam FE excedet AC, hoc eſt per conſtr. HI, per *K*. Pari modo, quia AB excedit GH per O; ablatis æqualibus AC, HI etiam BC, ſeu FD excedet GI, per O. Jam quia argentum BC, & argentum DF æqualia ſunt mole, adeoque etiam pondere, & totum pondus AB toti ponderi DE per hyp. eſt æquale; erit quoque pondus reliquum auri AC, hoc eſt HI per conſt. æquale ponderi reliquo argenti EF. Igitur moles argentea EF eſt ad molem auream HI, ut reciprocè gravitas auri ad gravitatem argenti, ex. gr., ut QS ad S. Ergo dividendo *K*, qui eſt exceſſus EF ſupra HI, ut oſtendi ſupra, eſt ad HI, ut Q ad S. Deinde, quia jam oſtendimus, æqualia eſſe pondera EF, HI, cum etiam per hyp. æqualia ſint tota ED,

HG;

HG; liquet, reliqua FD, IG paria eſſe. Rurſum igitur argentea moles DF eſt ad auream molem IG, ut reciprocè gravitas auri ad gravitatem argenti, hoc eſt ut QS ad S. Igitur dividendo O, qui eſt exceſſus FD per demonſtrata ſuperius IG, eſt ad IG, ut Q ad S. Atqui jam oſtenſum eſt etiam, ut Q eſt ad S, ita K eſſe ad HI. Ergo, ut K ad HI, ſic O eſt ad



IG: & permutando, ut K eſt ad O, ſic HI eſt ad IG; & componendo, ut K cum O eſt ad O, ſic HG eſt ad IG; & (quia HG eſt moles homogenea), ſic pondus HG ad pondus IG. Atqui pondus HG per hyp. eſt pondus AB; & pondus IG ſupra oſtendi eſſe pondus argenti FD, ſeu CB. Ergo, ut K cum O ad O, ita mixti pondus AB eſt ad CB pondus argenti in eodem mixto. *Q. E. D.*

CAP. V.

Regula Poſitionis ſimplex.

PRo quæſito numero pone quemvis numerum, qui hypotheſis appellabitur, eumque examina juxta tenorem quæſtionis. Is ſi quæ-

ſtioni

ſtioni non ſatisfaciat, in regulâ trium primum locum teneat numerus, ex decurſu inventus, ſecundum hypotheſis, tertium numerus in quæſtione datus. Quartus ex his inventus ſolvet quæſtionem.

Illæ igitur quæſtiones, & ſolæ per unam poſitionem ſolvi poſſunt, ex quarum decurſu inventus eſt ad hypotheſim, ut numerus datus ad quæſitum.

Quæſtio I.

TRes ſimul debent 7000. Primus autem debet duplo plus, quàm ſecundus, & hic triplo minus, quàm tertius. Singuli quantum debent?

Pone ſecundum debere 100. Ergo primus debet 200, tertius 300: quæ ſimul conficiunt 600. Deberent autem conficere 7000. Numerus inventus 600 fit primus in regula trium; hypotheſis 100 ſecundus; datus in quæſtione 7000 tertius. Ex his invenitur quæſitus A. Igitur ſecundus habuit A, primus B, tertius C, qui numeri ſimul juncti conficiunt 7000.

A	$1166\frac{2}{3}$
B	$2333\frac{1}{3}$
C	3500

Demonſtratio hujus exempli, atque adeo totius Regulæ per ſe eſt manifeſta.

Quæſtio II.

HOſtilis Exercitus tertia pars cæſa eſt, pars quarta capta, 1000 fugerunt. Quot

ergo

ergo fuere univerſi? quot cæſi? quot capti?

Pro quæſito totius exercitus numero pone quemvis numerum, qui habeat datas partes, exemp. gr. 12. Igitur cæſi ſunt 4, capti 3, & ſuperſunt 5, qui fugerunt. Deberent autem fugiſſe 1000. Numerus ex decurſu inventus 5 primus eſto in regula trium, hypotheſis 12 ſecundus, datus 1000 tertius. Ex his prodit quæſitus 2400, cujus tertia pars eſt 800; quarta pars capta eſt 600: 800 autem, & 6000 cum 1000 fugitivis conficiunt 2400.

Quæſtio III.

TErtiam itineris partem confeci eques, quintam pedes, quæ ſimul efficiunt 50 leucas. Quot ergo milliaria totum iter complectitur? quot eques abſolvi? quot pedes?

Pro itinere toto pone quemvis numerum datas habentem partes puta 15. Eques igitur confeci 5 milliaria, pedes 3, quæ ſimul efficiunt 8 milliaria. Deberent autem conficere 50. In regula trium primus eſt 8 numerus inventus, hypotheſis 15 ſecundus, datus 50 tertius, ex quibus prodit quæſitus A. Totum ergo iter ſunt milliaria A, cujus pars tertia equeſtris eſt B, pars verò quinta pedeſtris eſt C, quæ ſimul efficiunt 50 milliaria.

A	$93\frac{3}{4}$
B	$31\frac{1}{4}$
C	$18\frac{3}{4}$

Quæ-

Quæſtio IV.

SI præſidium augeretur tertiâ ſui parte, & adhuc 100 accederent, eſſent Milites 3000. In præſidio igitur quot ſunt?

Hæc quæſtio, & hujuſmodi aliæ, ſic propoſitæ, unicâ poſitione ſolvi nequeunt. Ut ergo per unam poſitionem hujuſmodi quæſtiones ſolvantur, numerus integer 100 fractionibus, quæ partes denominant numeri quæſiti, adhærens auferendus eſt a dato numero 3000, ut fiat 2900; atque interim quæſtio ſic formanda. Si præſidium tertiâ ſui parte augeretur, Milites eſſent 2900: quot igitur ſunt in præſidio? Operando ex præſcripto regulæ, reperies in præſidio eſſe Milites 2175: hi enim aucti tertiâ ſui parte, quæ eſt 725, fiunt 2900. Quod ſi numero ſic invento 2175, præter tertiam ſui partem, addantur 100, quæ a 3000 ſupra abſtulimus, reſtituentur 3000, atque ita ſolutio obtinebitur quæſtionis datæ.

Quæſtio V.

ANtonius ætatem Caroli continet bis, & adhuc 4 annos, Paulus utriuſque ætatem complectitur, & inſuper annos 6: omnes verò tres ſimul conficiunt 60 annos. Quot ergo ſinguli annos habent?

Neque hæc quæſtio per unicam poſitionem ſolvenda eſt. Ponatur enim, Carolum habere annos 6. Horum duplo ſi addam 4, habebo 16 annos Antonii. Horum verò anni juncti, adjectis 6, dant 28 annos Pauli. Et tres ſimul

conficient annos 50. In regula trium primus eſto 50, ſecundus 6 hypotheſis, tertius 60 datus. Ex his pro quæſito annorum Caroli proveniet A, qui numerus non ſolvit quæſtionem: ſic enim Antonius haberet annos B; Paulus verò annos G; & tres ſimul conficient annos D. Deberent autem 60.

A	$7\frac{1}{5}$
B	$18\frac{2}{5}$
C	$31\frac{3}{5}$
D	$57\frac{1}{5}$

Certum igitur eſt, non eſſe hic numerum inventum ad hypotheſim, ut datus eſt ad quæſitum: aliàs enim unicâ poſitione fuiſſet quæſtio per regulam trium ſoluta. Verùm, cum ſæpe non ita promptum ſit diſcernere, utrum numerus ex poſitione inventus ſit ad poſitionem, ſeu hypotheſim, ut datus ſit ad quæſitum; aliud erit hujus rei indicium aſſignandum.

Ex quo indicio colligatur, quæſtionem unicâ poſitione ſolvi non poſſe.

QUotieſcumque, ut cum numero ad libitum poſito juxta quæſtionis tenorem procedatur, aſſumi debet numerus aliquis, in quæſtione datus, certus eſto, quæſtionem unicâ poſitione ſolvi non poſſe.

Exemplum ſumatur in quæſtione ultimâ ſuperiori, in qua pro annis Caroli poſitus eſt 6. Ut jam cum hac hypotheſi procedatur juxta tenorem quæſtionis, aſſumi debent 4, ad duplicatos Caroli annos adjiciendi, ut habeatur ætas Antonii: qui numerus 4, quia datus eſt in quæſtione, ea ſolvi non poterit unicâ poſitione.

Quod

Quod univerſaliter ſic demonſtro.

F		V
X	A	
Z	I	D

HYpotheſis, ſeu poſitio falſa ſit F: numerus verus, qui quæritur, eſto V: numerus quiſpiam in quæſtione datus, qui aſſumi debuit, ut cum falſâ hypotheſi F quæſtio decurri poſſet, ſit A. Numerus datus, ſeu cognitus principalis, qui cum eodem A, & vero quæſito V, tenore quæſtionis decurſo, producitur, eſto D. Manifeſtum eſt, A non eſſe ad F, ut A eſt ad V; cum F, & V ex hyp. ſint inæquales. Alius ergo X major, minorve, quam A, erit ad F, ut A eſt ad V. Procedendo igitur cum V, & F, juxta quæſtionis tenorem, producatur Z. Quoniam igitur V, & A ipſis F, & V ſunt proportionales; manifeſtum eſt, ſi juxta ejuſdem quæſtionis tenorem, tam cum X, & F, quàm cum A, & V procedatur, productos inde numeros Z, & D fore ipſis F, & V proportionales. Sit jam I ille numerus, qui inventus eſt decurrendo cum falſâ poſitione F tenorem quæſtionis, aſſumendo ad hoc datum illum numerum A. Quoniam igitur E, & A, ut oſtendi ſupra, ſunt inæquales; etiam Z, & I producti, ſeu inventi ex decurſu quæſtionis ille cum X, & F; hic cum A, & F, inæquales erunt. Quare cum ſupra demonſtratum ſit, Z eſſe ad E, ut D eſt ad V; non erit I, inventus ex decurſâ quæſtione cum falſâ hypotheſi F, & uno ex datis A, ad hypotheſim F; ut eſt datus numerus D, qui fit decurrendo quæſtionem cum

vero quæſito V. Ejuſmodi ergo quæſtio non ſolvitur unâ poſitione. *Q. E. D.*

Scholium.

Cum numerus ex poſitione inventus, & in quæſtione datus ſunt ſimiles plani, vel ſolidi, vel gradus altioris cujuſcumque; neque tum quartus proportionalis per regulam trium inventus erit is, qui quæritur.

Diſponendi ſint 1875 milites acie rectangulâ, ſic, ut latus ſit triplo longius fronte. Quot in fronte diſponendi? quot in latere? Pone 4 in fronte. Ergo in latere erunt 12, qui numeri ducti in invicem conficiunt 48. Deberent autem 1875. Sunt ergo 48 inventus, & 1875 ſimiles plani, cum latera habeant ſimilia. Ergo eorum proportio per XVIII. VIII. duplicata eſt proportionis laterum, quæ ſunt ipſa hypotheſis 4, & quæſitus. Igitur permutando, non eſt inventus 48 ex hypotheſi 4 ad hypotheſim 4, ut datus 1875 ad quæſitum. Ergo hæc quæſtio per hanc regulam ſolvi nequit. Eodem modo id ipſum oſtendam, cum inventus, & datus ſunt ſimiles ſolidi, ut continget in hac quæſtione. Eſt murus, qui continet 13824 pedes cubicos, longitudo ejus eſt decupla altitudinis, hæc verò quintupla ſpiſſitudinis. Quæritur longitudo, altitudo, ſpiſſitudo.

Cæterum quæſtiones hujuſmodi aliis ſolvuntur viis, & facillimè per Algebram, cujus vis nullo quæſtionum genere limitatur.

CAP. VI.

Regula duplicis poſitionis.

HÆc regula præcedenti multo univerſalior eſt: omnes enim quæſtiones, quæ per unam poſitionem ſolvi poſſunt, ſolvuntur etiam per duas; & præter has aliæ innumeræ, quæ per unam ſolvi non poſſunt.

Regula verò ſic habet. Pro quæſito numero pone quemvis numerum, qui dicetur hypotheſis, & cum eo procede, juxta tenorem quæſtionis: cui ſi non ſatisfaciat, errorem hypotheſi ſubſcribe. Ponatur deinde alius quicumque numerus, cum quo ſimiliter ratiocinare, juxta quæſtionis ſententiam, cui ſi non ſatisfaciat, errorem ſubſcribe hypotheſi ſuæ. Errores porro, ſi exceſſu peccant, notentur ſigno +; ſi defectu, ſigno —.

Ex duplici hac poſitione quæſitus numerus per regulam trium elicietur duobus modis.

Primus modus ex duplici errore eliciendi quæſitum.

IN regula trium primo loco ſtatuatur differentia errorum, ſi ſimiles ii ſunt; errorum ſumma, ſi diſſimiles: ſecundo loco differentia hypotheſum: tertio loco error alteruter.

Quartus proportionalis, ex his tribus inventus, illi hypotheſi, ex qua error tertio regulæ trium loco aſſumptus profluxit, addendus eſt, cum aſſumptus eſt error deficiens; ſubtrahendus, cum excedens, ut habeatur quæſitus.

Errores dicuntur ſimiles, cum vel uterque eſt per defectum, vel uterque per exceſſum diſſimiles, cum unus eſt per defectum, alter per exceſſum.

Nota I. Expedit plerumque hypotheſes aſſumere quàm minimas, imò unitatem, ſi fieri poteſt, & binarium, ut quàm breviſſima ſit operatio. II. Expediet item plerumque primam hypotheſim ſolâ unitate augere, vel minuere, ut habeatur hypotheſis altera, ſic enim regula trium abſolvetur ſolâ diviſione. III. aſſumendæ hypotheſes, quæ ſine fractionibus, quantum fieri poterit, juxta tenorem quæſtionis poſſint examinari: qua de causâ nonnunquam expediet duas notationes primas negligere.

Reliquum eſt, ut exemplis præcepta declaremus.

Quæſtio I.

TRes lucrati ſunt aureos 400. Lucrum ſecundi ſuperat lucrum primi aureis 12. Lucrum verò tertii excedit lucrum ſecundi aureis 16. Quæritur lucrum ſingulorum.

Hyp. 1. 2. hyp.
err.—357.—354 err.
3
differ.

Lucrum primi eſto aureus unus. Ergo ſecundi lucrum ſunt 13 aurei, tertii 29, quæ ſimul omnia conficiunt 43 aureos. Debebant autem conficere 400. Error igitur per defectum eſt 357. Eſto rurſus lucrum primi, 2 aurei. Ergo ſecundi eſt 14, tertii 30, quæ ſimul efficiunt 46. Deberent autem 400. Erratum igitur eſt rurſum defe-

defectu 354. Quoniam igitur uterque error defectus eſt, ſic regulæ trium ordinandi erunt

3	1	—357. err. pri.
Differ. err.	Differ. hyp.	
		—354. err. ſec.

termini, ex tribus 3, 1, 357 elicitur quartus 119, addendus primæ hypotheſi 1, ut fiat 120 numerus quæſitus: ex tribus 3, 1, 354, quartus prodit 118, qui additus ſecundæ hypotheſi 2, etiam dat 120 numerum quæſitum. Igitur primi lucrum ſunt aurei 120: quibus adde 12, fit lucrum ſecundi 132. Huic quoque ſi addas 16, fit 148 lucrum tertii, qui tres numeri faciunt 400.

Aliter.

hyp. 1000	1001. hyp.
+2640	+2643

Finge primi lucrum eſſe 1000. Ergo ſecundi eſt 1012, & tertii 1028: quæ ſimul omnia faciunt 3040. Deberent autem 400. Erratum eſt ergo exceſſu 2640. Finge rurſum primi lucrum eſſe 1001. Ergo ſecundi eſt 1013, tertii 1029: quæ tria ſimul efficiunt 3043. Deberent autem 400. Erratum eſt ergo rurſus exceſſu 2643. Quare cum uterque error ſit per exceſſum, regula trium ordinabitur, ut ſupra; ſed quartus proportionalis ab hypotheſi erit ſubducendus.

3	1	+ 2640. err. pri.
Diff. error.	Diff. hyp.	
		+ 2643. err. ſec.

Ex tribus 3, 1, 2640 elicitur quartus 880, ſubtrahendus ab hypotheſi prima 1000, ut habeatur quæſitus 120. Ex tribus 3, 1, 2643 quartus prodit 881, qui ſubtractus ab hypotheſi ſecunda 1001, exhibet rurſus quæſitum 120.

Aliter.

hyp. 1.	1000. hyp.
—357	+2640.

Finge primi lucrum eſſe unum. Deprehendes, ut ſupra, errorem 357 per defectum. Finge rurſus lucrum ſecundi eſſe 1000. Error deprehendetur 2640 per exceſſum. Quoniam ergo diſſimiles errores ſunt, regula trium ſic ordinabitur.

2997	999	—357 err. pri.
Summa err.	Diff. hyp.	
		+2640. err. ſec.

Ex tribus 2997, 999, 357 habetur quartus 119, qui, quòd error fuerit per defectum, addendus eſt primæ hypotheſi 1, ut habeatur quæſitus 120. Ex tribus, 2997, 999, 2640 invenitur quartus 880 qui, quòd error fuerit per exceſſum, ſubtrahendus eſt ab hypotheſi ſecundâ 1000, & prodit idem quæſitus 120, qui ſupra.

Voluimus in hujus primæ quæſtionis ſolutione omnes regulæ caſus exponere. Quod hìc feciſſe ſemel ſufficiet.

Quæ-

Quæſtio II.

ÆTas Antonii ætatem Caroli contiaet bis, & adhuc 4 annos; Paulus utriuſque ætatem complectitur, & annos adhuc 6. Omnes verò tres ſimul conficiunt annos 60. Quæ ætas eſt ſingulorum?

Hæc quæſtio eſt illa, quam Cap. præced. huc rejecimus.

Ætas Caroli eſto annus 1. Ergo Antonii ætas eſt 6: Pauli 13: & tres ſimul efficiunt 20. Deberent autem 60. Erratum eſt ergo defectu 40.

Hyp. 1.	2. hyp.
—40	—34.

Fingo rurſum, annos Caroli eſſe 2. Ergo Antonii ſunt 8: Pauli 16: & ſimul omnes efficiunt 26. Erratum igitur defectu 34. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Err. diff.	Hyp. diff.	Error prim.
6	1	—40

Ex qua proveniet quartus A, addendus hypotheſi primæ 1, ut fiat quæſitus B, ætas, nempe Caroli.

A $6\frac{2}{3}$

B $7\frac{2}{3}$

Quæſtio III.

COnficienda eſt certa pecuniæ ſumma. Si ſinguli conferrent 1 florenum, deficerent ad ſummam floreni 19. Si duos ſinguli, redundarent itidem 10. Quanta eſt ſumma, & quot Collatores?

Fin-

Fingo Collatores eſſe 100, qui ſinguli conferentes 1 florenum conficient 100 Flor., quæ ſumma quia a ſummâ quæſitâ deficere debet florenis 10, ſumma quæſita eſſet 110. Si jam ſinguli ex Collatoribus 100 conferant Flor. 2, fient 200: a quibus ſi aufers 10, fit ſumma 190, quæ deberet eſſe æqualis priori 110. Sed aberrat per exceſſum 80. Fingo rurſum Collatores eſſe 101, hi ſinguli conferentes 1 florenum conficiunt ſummam 101, ac proinde ſumma quæſita eſſet 111.

Hyp. 100. 101. hyp.
+ 80 + 81

Quod ſi conferrent ſinguli duos florenos, conficerent 202: a quibus ſi aufers 10, fit ſumma 192, quæ deberet æqualis eſſe ſummæ priori 111. Sed aberrat exceſſu 81. Sic ergo regula trium ordinabitur.

1	1	80
Diff. err.	Diff. hyp.	Err. pri.

Qua reperitur quartus 80, auferendus ab hypotheſi prima 100. Quæſitus ergo Collatorum numerus eſt 20; quibus ſi addas 10, fit ſumma quæſita 30 flor. Si enim viceni ſinguli conferant 1, fit ſumma 20, quæ deficit a 30 per 10. Si verò ſinguli conferant 2, fit ſumma 40, quæ 30 excedit per 10.

Quæſtio IV.

Regius Exercitus conſtat Hiſpanis, Belgis, Germanis. Germani ſunt 10,000. Belgæ conficiunt tertiam partem Germanorum, & Hiſpanorum. Hiſpani dimidiam Germanorum,

ſum, & Belgarum. Quot ergo ſunt Belgæ? quot Hiſpani?

Pono Belgas eſſe 4000. Ergo Germani, & Hiſpani ſunt 12000. Ergo quia Germani ſunt 10000, Hiſpani erunt 2000: qui bis ſumpti deberent conficere Germanos, & Belgas, nempe 14000. Conficiunt autem tantum 4000. Erratum ergo eſt defectu 10000. Fingo rurſum, Belgas eſſe 5000. Ergo Germani, & Hiſpani ſunt 15000. Et quia Germani ſunt 10000, Hiſpani erunt 5000: qui bis ſumpti conficiunt 10000. Deberent autem conficere Germanos, & Belgas, nempe 15000. Erratum ergo eſt rurſum defectu 5000. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Hyp.	Hyp.
4000	5000
—10000	—5000

5000.	1000.	—10000.
Diff. errorum	Diff. hyp.	Error primus.

Qua reperitur quartus 2000, addendus hypotheſi primæ 4000. Sunt igitur Belgæ 6000, Hiſpani 8000.

Quæſtio V.

SI ex Regio Equitatu ad hoſtilem transfugerent 900, æquales forent utrimque. Si vero 900 ex hoſtili ad Regium transfugerent, eſſet Regius decuplo major hoſtili. Quæritur numerus utriuſque Equitatus.

Fingo Equitatum hoſtilem eſſe 2000. Si ex his transfugiant 900 ad Regios, reſtabunt

1100,

1100, & his decuplo tum major erit Equitatus Regius, ac proinde 11, 000 Unde ſi demam 900 transfugas, Regius Equitatus erit 10, 100. Si ex hoc transfugiant 900 ad hoſtilem, reſtarent ex Regiis 9200, & hoſtilis fieret 2900: exceditque tum adhuc Regius hoſtilem numerum 6300. Debebat autem æqualis eſſe. Erratum eſt igitur exceſſu 6300. Fingo deinde, hoſtilem Equitatum eſſe 2001, & diſcurrendo rurſum juxta tenorem quæſtionis, reperio errari per exceſſum 6309. Sic igitur regula trium ordinabitur.

Hyp.	hyp.
2000	2001.
+6300	+6309

9	1.	+6300.
Diff.err.	Diff.hyp.	Er.primus.

Ex qua reperitur quartus 700, a prima hypotheſi 2000 auferendus, quia error hypotheſeos eſt per exceſſum, ut fiat 1300. Hoſtilis ergo Equitatus eſt 1300, Regius 3100.

Hæc quæſtio ſic etiam proponi poterat. Si Petrus Paulo ex ſuis nummis det 9, habebunt æquè multos ambo. Si verò Paulus ex ſuis det 9 Petro, is decuplo habebit plures, quàm Paulus. Quot ergo nummos habuit Petrus? quot Paulus? Reperies Petrum habuiſſe 31, Paulum 13.

Fraus Aurifabri, de qua egi ſub finem Cap. IV. etiam per hanc regulam reperitur hunc in modum.

Qua-

Quæſtio VI.

Corona ex auro, & argento mixta ſit 10 lib. Inquiratur, quantum aurum in aquâ fiat levius, quàm in aere. Fit proportione 18 ad 19. Hinc per regulam trium elicitur, maſſam auri 10 lib. in aquâ leviorem fieri proportione A ad 10. Inquiratur deinde, qua pro-

A $9\frac{9}{19}$ ad 10

A $9\frac{27}{589}$ ad 10

C $9\frac{25}{589}$ ad 10

B $9\frac{1}{31}$ ad 10

B $9\frac{19}{589}$ ad 10

portione argentum in aquâ fiat levius. Ea eſt 28 ad 31. Ex qua elicitur, maſſam argenti 10 lib. leviorem fieri in aquâ proportione B ad 10. Si jam Corona 10. lib. ex auro, & argento mixta imponatur aquæ, ea fiet levior proportione aliquâ inter priores mediâ. Ea ſit C ad 10: Quæritur, quantum argenti ſit permixtum.

Fingo admixtam eſſe libram 1. Ergo auri ſunt

ſunt in Corona lib. 9. Jam ſi auri libræ 10 ſunt in aqua libræ A; ergo 9 libræ auri in aquâ quot appendent libras? per regulam trium: reperio libras D. Rurſum ſi 10 lib. argenti in aquâ ſunt lib. B; ergo 1 lib. argenti in Coronâ quid appendet in aquâ? reperio E. Igitur D, & E deberent conficere C pondus coronæ in aquâ.

$D\ \frac{47952}{5890}$ $E\ \frac{5320}{5890}$

$F\ \frac{42632}{5890}$ $G\ \frac{10628}{5890}$

Conficiunt autem F. Erratum eſt igitur defectu G. Fingo deinde, admixtas eſſe libras argenti duas, & diſcurrendo ut ſupra, errorem reperio alterum L per exceſſum. Sic igitur regula trium ordinabitur.

$L\ \frac{2}{589}$ ſeu $\frac{20}{5890}$

$\frac{10648}{5890}$ 1. $\frac{2}{589}$ $N\ \frac{12780}{6271672}$

Sum. err. Diff. Hyp. err. ſec.

Ex qua proveniet N, quæſita argenti quantitas in mixto.

Alter modus ex duplici errore eliciendi quæſitum.

SI errores ſunt ſimiles, ducatur prima hypotheſis in errorem ſecundæ, & hypotheſis ſecunda in errorem primæ, & productorum differentia dividatur per differentiam errorum. Quotiens erit numerus quæſitus.

Si errores ſunt diſſimiles, productorum ſumma

ma dividatur per ſummam errorum.

Reſumatur quæſtio prima, in qua hypotheſes erant 1, & 2; errores ſimiles — 357, — 354. Factâ multiplicatione alternâ, ſive in crucem, producta ſunt 354, 714, quorum differentia 360 diviſa per errorum differentiam 3, dat 120 numerum quæſitum.

Pri.	Sec.		
1	2		
— 357	— 354		
	3	Producta	
Err. Diff.		354	714
			360
			Diff.

In eâdem quæſtione aliæ erant hypotheſes 1000, & 1001, ex quibus errores provenerant ſimiles + 2640, & + 2643. Ex hypotheſium per errores alternâ multiplicatione producta ſunt 2643000, 2642640, quorum differentia 360, diviſa per 3 differentiam errorum, exhibet 120 quæſitum numerum.

Rurſus in eâdem quæſtione hypotheſes fuere, 1 & 1000, ex quibus errores diſſimiles — 357, & + 2640. Ex his, in alternos errores ductis, producuntur 2640, & 357000; quorum jam ſumma (ſunt enim errores diſſimiles) 359640, diviſa per ſummam errorum 2997, exhibet quæſitum 120.

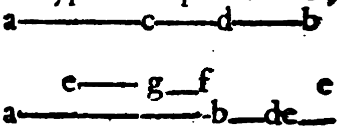
Prior modus ſimplicior eſt, & plerumque expeditior.

De primi modi demonſtratione.

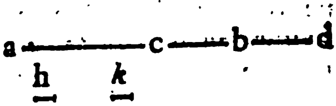
QUod ad primum modum attinet, nullâ peculiari demonſtratione opus eſt; quandoquidem ſupponitur, ut quæſtio per hanc regulam

gulam ſolvi poſſit, uti differentia, vel ſumma errorum eſt ad differentiam hypotheſium, ita eſſe errorem ad numerum, qui ſuæ hypotheſi addendus, vel demendus eſt ad obtinendum quæſitum. Tantum igitur proportionalitas illa erit nonnihil declaranda.

Quæſitum ſit AB: hypotheſis prima AC, & illius error EF: hypotheſis ſecunda AD, & hujus error EG. Sint autem primò hypotheſes, vel ambæ ſimul minores quæſito, vel ſimul ambæ majores, ut errores habeantur ſimiles. Si jam ſit, ut errorum differentia GF ad hypotheſium differentiam DC, ita primus error EF ad CB, quod primæ hypotheſi AC ad quæſitum AB deeſt, vel redundat, vel rurſum ſi ſit, ut errorum differentia GF, ad hypotheſium differentiam DC, ita ſecundus error EG ad DB, quod ſecundæ hypotheſi AD deeſt, vel redundat ad quæſitum AB, quæſtio per hanc regulam ſolvi poterit. Si tunc enim, quod præſcribit regula, differentiæ errorum, differentiæ hypotheſium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is illud erit, quod alterutri hypotheſi debet addi, vel demi, ut habeatur quæſitum. Quod quidem per ſe eſt manifeſtum.



Eſto deinde hypotheſis prima BC minor quæſito AB, ejuſdem error H per defectum; hypotheſis verò ſecunda AD major quæſito, ejuſque error K per exceſſum. Si jam, ut ſumma errorum HK, eſt ad hypotheſium differentiam CD, ita ſit H error primus ad CB defe-



defectum primæ hypotheſeos AC a quæſito AB, vel ſecundus error K ad BD exceſſum hypotheſeos ſecundæ AD ſupra quæſitum, ſolvetur quæſtio per hanc regulam. Si enim, quod regula jubet, ſummæ errorum, differentiæ hypotheſium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is erit hypotheſeos a quæſito defectus, vel exceſſus, ut per ſe patet.

Si porro quæras, quando ſit errorum differentia, vel ſumma ad differentiam hypotheſium, ut error ad hypotheſeos ſuæ exceſſum, defectumve a quæſito; ac proinde quæ ſub hanc regulam quæſtiones cadant, quæ non. Reſpondeo, id ex ipsâ quæſtionum naturâ eſſe dijudicandum. De quo quidem, quia multa dicere operæ pretium non eſt, e pluribus unum, alterumve indicium adferam obvium, & facile.

Si ex duabus hypotheſibus plures habeantur errores, quàm duo, quæſtio ſub hanc regulam non cadet. Talis eſt hæc: invenire numerum, quo diviſo per 2, 3, 4, 5, 6 reſtet ſemper unum, vel alii numeri dati: diviſo verò per 7 reſtet nihil.

Si, cum uterque error eſt per defectum, error hypotheſeos majoris non ſit minor errore minoris; aut cum uterque error eſt per exceſſum, ſi error hypotheſeos majoris non ſit major errore minoris: ſcito rurſum quæſtionem non cadere ſub hanc regulam. Talis eſt quæſtio præcedens, imò etiam hæc. Invenire numerum, quo diviſo per 7 reſtent 3: diviſo

 per

per 9 reſtet nihil. Pono 27 pro quæſito: hunc metitur quidem 9, ſed 7 dividens relinquit 6. Deberet autem relinquere 3. Error igitur eſt 3 per exceſſum. Pono deinde pro quæſito 54, majorem primâ hypoth. 27. Hunc 9 metitur, at 7 dividens relinquit 5. Deberet autem ſolum 3. Error igitur etiam per exceſſum, & minor errore primo. Non cadit ergo quæſtio ſub hanc regulam.

Tandem, ne nimium hìc intricentur Tyrones, generale indicium illis accomodatum iſtud eſto. Si ſemel cum duabus hypotheſibus ex præſcripto regulæ operatus quæſitum non obtineas, neque per alias quaſcumque hypotheſes quæſitum obtinebitur.

Modi ſecundi demonſtratio.

Caſus I.

a —— c —— d —— b
e — *g* —— f

QUæſitum eſto AB: hypotheſis prima AC, ſecunda AD, utraque quæſito minor: error primæ EF, ſecundæ EG. Productum ex hypotheſi prima AC in errorem ſecundum EG, dicatur AC in EG. Productum ex hypotheſi ſecunda AD in errorem primum EF, æquatur *a* his quatuor, AC in EG; AC in GF; CD in EG; CD in GF. Quia igitur AC in EG utrique producto commune eſt, erit

a collig. ex 1. 2.

AC

Productorum differentia.	Æ	AC in GF CD in EG CD in GF	quæ X dicantur.
Dein AB in FG	Æ	[b] AC in GF CD in GF DB in GF	quæ dicantur Z.

b 1. 2.

Jam quia ex ſuppoſitione GF differentia errorum eſt ad CD hypotheſium differentiam, ut error primus EF ad CB hypotheſeos primæ defectum a quæſito AB: etiam permutando erit GF ad EF, ut CD ad CB. Ergo & GF eſt ad EG, ut CD ad DB. Ergo in aggregato Z, GF in DB, ſeu DB in GF æquatur CD [c] in EG, in aggregato X. Quare cum reliqua utrimque communia ſint, erunt tota X, & Z æqualia. Atqui jam oſtenſum eſt Z æquari AB in GF, X verò æquari differentiæ productorum. Ergo etiam AB in GF æquatur differentiæ productorum. Atqui AB in GF diviſo per GF quotiens eſt AB. Ergo etiam differentiâ productorum diviſâ per GF differentiam errorum quotiens eſt AB, ipſum videlicet quæſitum. *Q. E. D.*

c 19. 7.

Caſus II.

ESto jam hypotheſis utraque AC, AD major quæſito AB. Productum ex hypotheſi primâ AC in errorem ſecundæ EG, dicatur AC in EG.

AC in EG	Æ	AB in EG BD in EG DC in EG	quæ dicantur P

Productum ex hypotheſi ſecundâ AD in errorem primæ EF, dicatur AD in EF.

AD in EF	Æ	AB in EG AB in GF BD in EG BD in GF	quæ dicantur Q

a——b——d——c
e——g——f

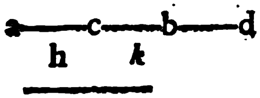
Nunc quia ex ſuppoſitione GF differentia errorum eſt ad DC differentiam hypotheſium, ut primus error EF ad BC exceſſum hypotheſeos primæ AC ſupra quæſitum AB, (aliàs enim quæſtio per hanc regulam ſolvi non poſſet) etiam permutando erit GF ad EF, ut DC ad BC. Ergo etiam GF eſt ad EG, ut DC ad BD. Ergo GF in BD, ſeu BD in GF æquatur DC in EG. Quare ſi in aggregato Q pro BD in GF ſubſtituatur DC in EG, erit

AD in EF	Æ	AB in EG AB in GF BD in EG DC in EG	quæ dicantur R

Quare ſi conferantur R, & P, invenietur productorum differentia eſſe AB in GF. Atqui AB in GF, diviſo per GF, quotiens eſt AB. Ergo differentiâ productorum diviſâ per GF erro-

errorum differentiam, quotiens eſt AB, ipſum nempe quæſitum. *Q. E. D.*

Caſus III.



SIt denique prima hypotheſis AC minor quæſito AB; at ſecunda AD major. Productum ex hypotheſi primâ AC in errorem ſecundum *K*, dicatur AC, in *K*. Productum ex AD hypotheſi ſecundâ in errorem primum H æquatur, AC in H; CB in H, BD in H. Ergo

Summa productorum.	Æ	*a*AC in *K* AC in H CB in H BD in H	quæ vocentur S.	*a* collig. e x 1. 2.

Dein AB in H*K*	Æ	AC in *K* AC in H CB in H CB in *K*	quæ vocentur V

Nunc quia per hypotheſim H*K* errorum ſumma eſt ad CD differentiam hypotheſium, ut H error primus eſt ad CB hypotheſeos primæ AC defectum à quæſito AB; erit etiam permutando, dividendo, ac invertendo H ad *K*, ut CB ad BC. Ergo in S, & V, BD in H, & CB in *K* æqualia ſunt. Quare cum reliqua utrimque communia ſint, erunt tota S, & V æqualia. Quare cum V ſit AB in H*K*, & S ſit ſumma productorum; etiam AB in H*K* ſum-

Vide etiam ſchemata pag. præc.

o 19. 7.

mæ productorum æqualis erit. Atqui AB in HK, diviſo per HK, quotiens eſt AB. Ergo etiam productorum ſummâ diviſâ per HK ſummam errorum, quotiens eſt AB, ipſum nempe quæſitum. *Q. E. D.*

Scholium.

QUæſtio, quam negavi ſupra per regulam duplicis poſitionis ſolvi poſſe, celebratur ab Arithmeticis, nec tamen ſolvitur ab ullo, quem legerim. Quare viſum eſt in gratiam Studioſorum illius ſolutionem hic apponere.

Lemma.

DAtum numerum A, ſæpius poſitum, dividere per datum B, donec reſiduus ſit datus D.

		D		3.		
		A		B		
		9		7		
2.	4.	6.	1.	3.		
9.	9.	9.	9.	9.	45	C
7	7	7	7	7		

Hoc ita fiet: primo A 9 diviſo per B 7, reſtat 2, ſcribe ſupra primum 9: ac mente addito ad ſecundum 9, ut fiat 11 Divide per 7, reſtabit 4, quæ ſcribe ſupra ſecundum 9, ac adde ad tertium 9, ut fiat 13; quæ rurſum divide per 7, reſtabit 6. Sic deinceps procedendo, reperies hic ex quintâ diviſione relinqui D 3, numerum datum.

Eo-

Eodem modo operaberis, ſi dentur duo numeri dividendi *A*, & *X*, quorum primus *A* tantùm ſemel, alter *X* ſæpius ponitur. In exemplo appoſito poſt quintam diviſionem relinquitur numerus datus *D* 2.

A		X	D 2.	
45.		65.		
		B 5		
0	3	1	4	2
45.	63.	63.	63.	63.
5	5	5	5	5
3	0	3	0	3
9	9	9	9	6
6	6	6	6	

Quod ſi contigat bis relinqui eundem numerum, diverſum a dato, quæſitum lemmatis erit impoſſibile. In primo exemplo, in quo 9 ſæpius poſitus dividitur per 6, tam poſt primam, quàm poſt tertiam diviſionem reſtat 3: liquet igitur, continuatâ ulterius diviſione, ſemper eadem fore reſidua 3.0.3. In ſecundo exemplo, in quo 9, & 8 ſæpius poſitus dividuntur per 6, tam poſt primam diviſionem, quàm poſt quartam reſtat 3: quare ſi continuetur diviſio, eadem ſemper recurrent reſidua 3. 5. 1: ac proinde ſi reſiduum quæſitum in lemmate ſit ab his diverſum, lemma erit impoſſibile. Ratio per ſe eſt manifeſta.

3	5	1	3	5	1	3
9	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6			

PROBLEMA I.

INvenire numerum *K*, quo diviſo per datos quoſcumque *A*, *B* & *C*, ſint reſidua data *V*, *X*, *Z*, diviſo autem per alium datum *D*, reſtet nihil.

Inveniatur *F* multiplex numeri *D* talis,

ut eo diviſo per C, reſtet Z : quod fiet, ſi D to- ties ponatur, ac dividatur per C, donec re- ſtet Z, ut expoſitum eſt in lemmate : F eni tam multiplex eſt ipſius D, quoties D poſi- tus eſt.

	A	B	C	D.		N.315		63M	
	8.	5.	7.	9.					
	5	2	3		K		G	F	
	V	X	Z		1557.		297.	45.	
2	4	6	1	3	0	3	1	4	2
9.	9.	9.	9.	9.	45	63	63	63	63
7	7	7	7	7	5	5	5	5	5
			1	4	7	2	5		
			297.	315.	315.	315.	315.		
			6	8	8	8	8		

Si jam F diviſo etiam per B, non etiam re- ſtat X, inveniatur per XXXVI. Lib. VII. mi- nimus, quem D, & C metiuntur, qui ſit M: tum inveniatur numerus G compoſitus ex F, & multiplo ipſius M talis, ut eo diviſo per B reſtet X. Id verò fiet, ſi primò ponatur F 45, ac deinde toties M 63, donec his per B diviſis reſtet X: G enim æquatur F, & tam multiplo ipſius M, quoties M poſitus eſt.

Quod ſi jam G etiam diviſo per A, non re- ſtet etiam V, quæratur per XXXVIII. Lib. VII. numerus N minimus, quem tres D, C, B, metiuntur inveniatur deinde K compoſitus ex G, & multiplo ipſius N talis, ut eo diviſo per A, reſiduus ſit V: hoc verò obtinebitur, ſi primò ponatur G 297, ac deinde toties N 315, donec his diviſis per A, reſtet V: K enim æqua- tur G, & tam multiplo ipſius N, quoties N poſitus eſt.

Dico

Dico K eſſe quæſitum, & quidem minimum.

Demonſtratio.

Ex conſtr. D metitur M, ac proinde & multiplum ipſius M. Metietur etiam D multiplum b *ſuum F. Ergo D metitur G compoſitum ex F, & multiplo ipſius M. Metitur autem D* c *etiam N, adeoque & multiplum ejus. Ergo D metitur compoſitum* d *ex G, & multiplo ipſius N. Quod erat è quæſitis primum.* b conſt. c conſt. d conſt.

Deinde C dividens F e *relinquit Z. Atqui C* f *metitur M, adeoque & multiplum ejus. Ergo C dividens G, compoſitum* g *ex multiplo ipſius M, & ex F, etiam relinquit Z. Rurſum C metitur N, adeoque & ejus multiplum. Ergo C dividens K, compoſitum ex multiplo* h *ipſius N, & ex G, etiam relinquit Z. Quod erat ſecundum.* e conſt. f conſt. g conſt. h conſt.

Rurſus per conſtr. B dividens G relinquit X. Atqui B metitur i *N, adeoque & ejus multiplum. Ergo B dividens K, compoſitum* k *ex multiplo ipſius N, & ex G, relinquet X. Quod erat tertium.* i conſt. k conſt.

Denique per conſtruct. A dividens K relinquit V. Quod erat poſtremum. Quæſitus igitur numerus eſt K. Quod verò etiam minimus ſit, ex conſtructione patet. Sumpſimus enim M minimum, quem metiuntur D, C; & N minimum, quem metiuntur D, C, B.

Determinatio problematis patet ex lemmate.

PRO-

PROBLEMA II.

ISdem poſitis, numerum, qui problemati ſatisfaciat, ſecundum, & tertium, & omnes ex ordine reliquos infinitos reperire.

a 38. 7 Inveniatur O minimus, a quem omnes diviſores dati A, B, C, D metiuntur. Hic O additus primo K, ſuperiùs invento, dabit ſecundum K+O, additus verò ſecundo, dabit tertium K+2O. Et ſic deinceps.

Vide etiam ſchema pag. præc

Demonſtratio.

K	K+O	K+2O
1557		
	O	

QUoniam A per conſtr. metitur O, & per præced. dividens K relinquit V; etiam A metiens K+O relinquit V. Rurſum quia B metitur b O, dividens verò c K relinquit X; etiam B dividens K+O relinquit X. Pari modo oſtendam, ſi C dividat K+O relinqui Z. Denique, quia D metitur O ex conſt. & K per præced., metietur etiam K+O. Ergo K+O ex iis eſt, qui problemati ſatisfaciunt: & quidem ſecundus, quod ex K primo, & ex O omnium diviſorum A, B, C, D minimo dividendo ſit procreatus.

b conſt.
c conſt.

Eodem modo demonſtrabitur, tertium eſſe K+2O, & ſic deinceps in infinitum.

PROBLEMA III.

SI numerus quæratur, quo diviſo per quotcumque datos A, B, C, reſiduus ſit ſemper

B	C	D
4.	7.	6.
		4 0
R.	56.	56.
14. 2.	6.	6.
V.		
2.		

C. 38. 7.

quem A, B, C
R, compoſitus ex
ilis, ut eo diviſo
d obtinebitur, &
ties Q 56, donec
rſit. Q enim to-
iit, una cum V.

r b Q, mittente b conſt.
us Q. Ergo A,
compoſitum ex
linquunt V. D
iquit. Ergo R e conſt.

: reliqui omnes
faciunt, re-

In-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ LIBER V.

DE PROGRESSIONIBUS.

QUintum hunc, & poſtremum Arith-meticæ librum progreſſionibus dare viſum eſt. Eas alii obiter ferè tan tùm, & quaſi appendicis inſta tractare ſolent. Sunt tamen ejuſmodi, ſive theoriam ſpectes, ſive praxim ut contemplationem longiorem, accuratio remque mereantur.

DE

DE PROGRESSIONE ARITHMETICA

CAPUT I.

Progreſſionis Arithmeticæ affectiones.

PRogreſſio Arithmetica eſt ſeries numerorum ſe mutuò æquali exceſſu ſuperantium. Primus ſeriei terminus poteſt eſſe quicumque; exceſſus quoque terminorum quilibet eſſe poteſt; etiam æqualis primo termino.

1	2	3	4	5	6	7	8	9.	&c.
1	3	5	7	9	11	13	15	17.	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27.	&c.

THEOREMA I.

a	b	c	d	e	f	g	h	k
5	8	11	14	17	20	23	26	29

exceſ. x

3.

QUilibet terminus ſprogreſſionis Arithmeticæ continet primum, hoc eſt minimum terminum a*, & toties communem exceſſum* x*, quot poſt primum uſque ad ipſum ſ incluſivè ſunt termini.*

Patet ex definitione progreſſionis Arithmeticæ.

Corol-

Corollarium.

HAbetur igitur maximus terminus, ſi ex-
ceſſus ducatur in numerum terminoru
unitate mulctatum, & producto addatur m
nimus.

THEOREMA II.

*IN progreſſione Arithmeticá ſumma duoru
quorumlibet terminorum* c, g *æquatu
ſummæ quorumlibet duorum, ab ipſis æqual
ter diſtantium* a, h.

Demonſtratio.

QUoniam *k* ſuperat *b* exceſſu *x*, eodem
quo *b* ſuperat *a*; ſi *k* det ſuum *x* ipſi *a*
patet *k* futurum æquale ipſi *b*, & *a* ipſi *b*. Ig
tur *a* cum *k* æquatur *b* cum *b*. Eodem mod
oſtendam *b* cum *b* æquari *c* cum *g*. Ergo
cum *k* æquatur *c* cum *g*. *Q. E. D.*

THEOREMA III.

*PRogreſſionis Arithmeticæ terminus quicum
que dimidius eſt ſummæ duorum, a ſe
æqualiter diſtantium.*

De-

Demonſtratio.

a	b	c	d	e	f	g	h	k
5	8	11	14	(17)	20	23	26	29

exceſ. x
3

ACcipiatur terminus *e* quilibet. Quoniam tam *f* ipſum *e*, quàm *e* ipſum *d* excedunt exceſſu *x*; manifeſtum eſt, ſi *f* ſuum *x* det ipſi *d*, omnes tres *f*, *e*, *d* fore æquales. Ex quo patet, *e* dimidium eſſe ſummæ duorum *d*, *f*. Atqui per Theor. præced. ſumma *d*, *f* æquatur ſummæ *c*, *g*; & ſummæ *b*, *h*; & alteri cuilibet ſummæ duorum, æqualiter utrimque ex *d*, & *f* diſtantium. Ergo etiam *e* dimidius eſt ſummæ duorum, a ſe æqualiter diſtantium. *Q. E. D.*

THEOREMA IV.

IN qualibet progreſſione Arithmeticâ omnium terminorum ſumma habetur, I. Si ſumma minimi, & maximi termini ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur.

Vel II. Si ſumma minimi, & maximi ducatur in ſemiſſem numeri terminorum.

Vel III. Si ſemiſſis ſummæ minimi, & maximi ducatur in numerum terminorum.

Demonſtratio.

a b c d e f g h

SIT primò numerus terminorum par. Summæ binariæ *a*, *h*; & *b*, *g*; & *c*, *f*; & *d*, *e* ſunt inter ſe æqua-

æquales per Theor. II. Earum autem numerus æqualis eſt dimidio numero terminorum. Ergo una ex his ſummis binariis, puta *a*, *h*, ducta in dimidium numerum terminorum, æquabitur omnium terminorum ſummæ, (quod erat ſecundum;) ac proinde ducta in totum numerum terminorum erit ſummæ omnium dupla: Ex quo patet primum, & ex illo tertium.

Eſto deinde numerus terminorum impar; ut in ſchemate Theor. III. Cum ſummæ omnes binariæ *a*, *k*; & *b*, *h*; & *c*, *g*; & *d*, *f* ſint inter ſe æquales per Theor. II. patet ex diſcurſu præcedenti, unam ex his, puta *a*, *k*, ductam in numerum terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, *k*, qui in hoc exemplo, medium *e* omittendo, eſt 8, duplam fore eorumdem terminorum. Atqui ſumma *a*, *k* dupla eſt medii *e* per Theor. III. Ergo ſumma *a*, *k*, ducta in totum terminorum numerum 9, qui jam propter medium aſſumptum eſt priori 8 unitate major, dupla eſt omnium terminorum. Ex quo patet primum; ex illo autem facilè patebunt ſecundum, & tertium.

THEOREMA V.

Cum numerus terminorum eſt impar; medius in numerum terminorum ductus exhibet ſummam omnium terminorum.

a	b	c	d	(e)	f	g	h	k
2	7	12	17	(22)	27	32	37	42.

De-

Demonſtratio:

MEdius *e* dimidius eſt ſummæ extremorum *a*, *k* per Th. III. Atqui ſumma extremorum *a*, *k*, ducta in numerum terminorum; per Th. IV. dupla eſt ſummæ omnium. Ergo medius *e* ductus in numerum terminorum æqualis eſt omnium ſummæ. *Q. E. D.*

THEOREMA VI.

IN progreſſione naturali numerorum 1, 2, 3, 4, 5, *&c. ſi ultimus* 8 *ducatur in numerum proximè majorem* 9; *producti* 72 *ſemiſſis eſt ſumma omnium.*

1 2 3 4 5 6 7 8.

Demonſtratio.

NUmerus ultimo proximè major, quia tantùm unitate major eſt, æquatur ſummæ ultimi, & primi, qui eſt unitas. Deinde numerus ultimus in progreſſione naturali eſt ipſe terminorum numerus. Ducendo igitur ultimum in proximè majorem, duco ſummam primi, & ultimi in numerum terminorum. Atqui ſic producitur duplum ſummæ omnium per Theor. III. Ergo etiam cum ultimus in proximè majorem ducitur, duplum producitur ſummæ omnium. Producti ergo ſemiſſis eſt omnium ſumma. *Q. E. D.*

THEOREMA VII.

IN progreſſione naturali imparium 1, 3, 5, 7, &c. ſumma tota æqualis eſt quadrato numeri terminorum.

a l
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21
excef. 2.

Demonſtratio.

PEr Theor. IV. hæc ſumma tota æqualis eſt producto ex dimidio ſummæ extremorum *a*, & *l* in numerum terminorum. Atqui dimidia ſumma extremorum *a*, *l* eſt par numero terminorum, . adeoque productum illud eſt quadratus numeri terminorum. Ergo ſumma tota æqualis eſt quadrato numeri terminorum.

Quod autem ſemiſſis ſummæ extremorum *a*, *l* ſit par numero terminorum, ſic oſtendo. Per Theor. I, *l* continet *a* unitatem, & toties exceſſum communem 2, quot ſunt termini, dempto uno. Ergo ſi ad *l* adjiciatur *a*, nempe unitas, adhuc ſemel, continebit ſumma *a*, *l* toties 2, quot ſunt termini; ac proinde dupla eſt numeri terminorum. Ergo ſemiſſis ſummæ *a*, *l* numero terminorum æqualis eſt.

THEO-

THEOREMA VIII.

IN progreſſione naturali numerorum parium 2, 4, 6, 8, 10, &c. omnium ſumma æqualis eſt numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.

exceſ. 2.

a k

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20.

Demonſtratio.

PEr IV. Theor. hæc tota ſumma æquatur ſemiſſi ſummæ extremorum *a*, *k* ductæ in numerum terminorum. Atqui ſemiſſis ſummæ *a*, *k* eſt unitate major numero terminorum. Ergo tota ſumma æquatur numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.

Quod verò ſemiſſis ſummæ *a*, *k* ſit unitate major numero terminorum, ſic demonſtro. Quia hìc exceſſus communis eſt ipſe primus terminus *a*, manifeſtum ex Theor. I, *k* toties continere *a* nempe 2, quot ſunt termini; ac proinde duplum eſſe numeri terminorum. Ergo ſumma ipſorum *a*, *k* excedet duplum numeri terminorum exceſſu *a*. Ergo ſemiſſis ſummæ *a*, *k* excedet numerum terminorum dimidio ipſius *a*, hoc eſt unitate.

THEOREMA IX.

CUjuſcumque progreſſionis Arithmeticæ numerus terminorum habetur, ſi a maxi-

m, dematur minimus, & reſiduum per continuum exceſſum dividatur; additâ quotienti unitate.

Demonſtratio patet ex Theor. I.

CAP. II.

Progreſſionis Arithmeticæ Problemata.

PROBLEMA I.

PRogreſſionem Arithmeticam continuare, uno termino, & exceſſu datis.

Continuabitur aſcendendo, ſi exceſſus *x* termino dato *a* addatur, ut fiat *b*; & ad *b* rurſus *x*, ut fiat *c*; & ſic deinceps. Continuabis verò deſcendendo, ſi a termino dato, puta *d*, demas exceſſum *x*; ut fiat *c*; & ab *c* rurſus auferas *x*, ut fiat *b*; & ſic deinceps.

a	b	c	d
1	4	7	10
exceſ.		3.	
		x	

PROBLEMA II.

MInimo termino, exceſſu, & terminorum numero datis, invenire maximum.

Exceſſum duc in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum adde minimo termino, ſumma dabit maximum. Patet ex Theor. I. & Corollario.

PRO-

PROBLEMA III.

Minimo termino, exceſſu, & numero terminorum datis, invenire ſummam progreſſionis.

Per Probl. II. inveni maximum, ſi datus non ſit. Deinde ſummam extremorum (id eſt minimi, & maximi) duc in numerum terminorum. Producti ſemiſſis eſt ſumma.

Patet ex Theor. IV.

Aliter. Si ſumma extremorum par eſt, ejus ſemiſſis ducta in numerum terminorum, dabit ſummam totam.

Aliter. Si numerus terminorum par eſt; ſumma extremorum ducta in ſemiſſem numeri terminorum dabit ſummam totam.

Utrumque patet ex IV. Theor. *Cum aut ſumma extremorum, aut numerus terminorum impar eſt, proveniet quidem ſumma, ſed ut fractiones declinentur, præſtat tum uti modo primo.*

Aliter. Cum numerus terminorum impar eſt; medius in numerum terminorum ductus ſummam totam exhibebit.

Patet ex Theor. V.

Hi tres modi ſunt univerſales, & primus inſuper a fractionibus liber eſt. Alii tres particulares habentur ex Theorem. VII., VIII., IX.

PROBLEMA IV.

Maximo termino, exceſſu, & numero terminorum datis, invenire minimum.

Ducatur exceſſus in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum aufer a maximo. Relinquetur minimus.

Patet ex Theor. I., & Coroll.

Etiam independenter, vel ab exceſſu, vel a numero terminorum reperietur minimus, ſi maximus per numerum terminorum unitate mulctatum, vel per exceſſum dividatur: reſiduus enim erit minimus, ut patet ex eodem Theoremate.

PROBLEMA V.

Datis maximo, ac minimo terminis, & numero terminorum, invenire exceſſum.

Minimum aufer a maximo. Reſiduum divide per numerum terminorum unitate mulctatum. Quotiens erit exceſſus.

Patet ex Theor. I. ac Coroll.

Etiam independenter a minimo reperietur exceſſus, ſi maximus dividatur, quantum poteſt, per numerum terminorum unitate mulctatum. Quotiens enim erit ipſe exceſſus, ut patet ex eodem Theor. Reſiduum verò diviſionis erit minimus.

PRO-

PROBLEMA VI.

Minimo, maximo, & exceſſu datis, invenire numerum terminorum.

A maximo aufer minimum, & reſiduum divide per exceſſum. Quotiens unitate auctus erit numerus terminorum.

Patet ex I. Theor., & Coroll.

Etiam independenter a minimo reperietur terminorum numerus, ſi maximus per exceſſum dividatur quantum poteſt. Quotiens enim unitate auctus rurſus erit numerus terminorum, ut patet ex eodem Theor. Reſiduum verò ex diviſione erit minimus.

PROBLEMA VII.

Numero terminorum, exceſſu, & progreſſionis ſummâ datis, invenire minimum, & maximum.

a b
3 7 11 15 19 23
exc. 4. ſum. 78. num. term. 6.
c d e
quoti. (13. f
20. k
26. n

Summa progreſſionis *d*, dividatur per *e* numerum terminorum. Quotiens *f* erit ſemiſſis ſummæ extremorum *a*, *b*, per Theor. IV. Duplicetur *f*, & fiat *n*; erit *n* ſumma extremorum.

Deinde numerus terminorum *c* unitate mulctatus, ductus in exceſſum *c*, ſit *k*. Erit *k* extremus, dempto minimo, ut patet ex Coroll. Theor. I.

Si auferatur igitur *k* ab *n*, reſiduum erit duplum minimi. Semiſſis ergo reſidui erit minimus, eoque adjecto ad *k*, qui erat maximus, dempto minimo, proveniet maximus.

Si non k auferas a duplo f, *ſed ſemiſſem ipſius k à ſimplo* f, *reſiduum erit minimus quæſitus.*

PROBLEMA VIII.

D*Ato minimo* a, *exceſſu* c, *& ſummâ progreſſionis* b; *invenire numerum terminorum, & maximum terminum.*

Quia duplum minimi *a* poteſt eſſe majus, vel minus exceſſu *c*, hinc gemina Problematis ſolutio eſt.

a					
3	7	11	15	19	23
		c			b.
		exc.			ſum.
		4			78.

Eſto primum duplum minimi *a* majus exceſſu *c*. Reſiduum, hoc eſt differentiam, divide per exceſſum *c*. Quadratum ex ſemiſſe quotientis adde duplo ſummæ progreſſionis *b* diviſo per exceſſum *c*. Ex hac novâ ſummâ extrahe radicem quadratam: a qua aufer ſemiſſem quotientis. Quod reſtabit, erit numerus terminorum quæſitus.

Eſto

Eſto deinde duplum minimi *a* minus exceſſu *c*. Duplum minimi aufer ab exceſſu *c*. Reſiduum, hoc eſt differentiam, divide per exceſſum *c*. Quadratum ex ſemiſſe quotientis adde duplo ſummæ Progreſſionis *b*. Ex hac novâ ſummâ elice radicem quadratam: cui ſi addatur ſemiſſis quotientis, proveniet numerus quæſitus terminorum.

a					
2	7	12	17	22	27
		c			b
		exc.			ſum.
		5			87.

Invento numero terminorum, habetur maximus, per Probl. II.

$$yy\ Æ\ \frac{2b}{c}\qquad \frac{2a+c}{c}y$$

PROBLEMA IX.

Data ſit progreſſio Arithmetica a, b, c *&c., cujus exceſſus k, & numerus quicumque* n: *progreſſionem per tot terminos continuare, ut ejus ſumma par ſit numero dato* n, *in multitudinem terminorum ducto.*

Quoniam duplum minimi *a* poteſt eſſe majus, vel minus exceſſu *k*, duplex habetur ſolutio Problematis.

min.	a	3.
exceſ.	*k*	2.
mult.	y	8.
num. datus	*n*	10.

Si duplum minimi majus eſt exceſſu *k*; ex duplo dati *n* aufer differentiam inter duplum

mi-

minimi *a*, & exceſſum. Reſiduum divide per exceſſum *k*. Quotiens eſt multitudo terminorum quæſita.

Si minimi *a* duplum eſt minus exceſſu *k*; duplo dati *n* adde differentiam inter duplum minimi *a*, & exceſſum *k*: ſummam divide per exceſſum *k*. Quotiens eſt multitudo terminorum quæſita.

Determinatio patet ex conſtr.

$$y \text{ Æ } \frac{2n - 2a + k}{k}$$

PROBLEMA X.

Datur a *minimus terminus progreſſionis Arithmeticæ, & multitudo terminorum* b, *quæ ducta in alium datum numerum* m *æquatur ſummæ progreſſionis. Quæritur ipſa progreſſio.*

mini.	a
mult.	b
num. datus	m
exceſ.	x

A duplo numeri dati *m* aufer duplum minimi termini *a*. Reliquum divide per multitudinem terminorum, unitate mulctatam. Quotiens erit exceſſus ſecundi termini ſupra primum: quo invento, habentur ſinguli termini progreſſionis, per Prob. I.

Cum

$$y \text{ Æ } \frac{2m - 2a}{b - 1}$$

Cum tria hæc poſtrema Problemata ſolverim per Algebram, & per eamdem facillimè demonſtrentur, non putavi operæ pretium eſſe iis viâ ſyntheticâ, hoc eſt ordinariâ, demonſtrandis hic immorari.

CAPUT III.

Quæſtiones circa Progreſſiones Arithmeticas.

Reliquum eſt, ut ex allatis jam Problematis nonnulla ad materiam certam traducamus, per quæſtiones aliquot ſequentes.

Quæſtio I.

Conſcripti ſunt Milites per dies 30. Primo die adſcripti ſunt 300. Diebus ſequentibus affluxere ſemper totidem, quot die præcedenti, & adhuc 10 amplius. Quot ergo univerſim ſunt conſcripti?

Solvendo problema III. reperies conſcriptos eſſe 13350o. *Similis erit quæſtio ſequens.*

Quidam cum Operario, illius ſtimulaturus induſtriam, ita convenit: primo die lucraberis 30 aſſes; ſecundo totidem, & ſi ſatisfeceris, adhuc tres ſuperaddam; atque ita quolibet die tantum lucraberis, quantum præcedenti, & aſſes inſuper tres. Hac lege 20 dies operi ſunt impenſi. Quæritur ſumma ſtipendii.

Sol-

Solvendum eſt denuo Problema III. Ex quo reperies aſſes 1170, id eſt florenos 58.

Quæſtio II.

ARtifex ex pacto die primo lucratus eſt 40 aſſes, poſtremo 90; quolibet autem die tantum, quantum præcedenti, cum auctario ſemper 5 aſſium. Quot ergo dies operi impendit? & quantum lucratus eſt?

Solve Problema VI. Reperies dies 11. Tum ſolve problema III., & ſumma lucri proveniet aſſium 715.

Quæſtio III.

EX pacto lucratus eſt Artifex die primo tres ſolidos. Deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, cum auctario ſemper ſolidorum 4. Lucri ſumma fuit 78 ſolidorum. Quæruntur dies operi impenſi.

Solvendo problema VIII., reperies dies 6.

Quæſtio IV.

DUo æqualem ſummam nummorum expenderunt in pauperes: unus quotidiè diſtribuit nummos 10, alter verò die primo tres nummos; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti duobus ſemper adjectis. Quæritur numerus dierum, huic diſtributioni impenſus, & ipſa ſumma.

Solvendo problema IX., reperies 8 dies, quibus ſinguli expenderunt 80 nummos.

Quæ-

Quæſtio V.

DUo expenderunt in pauperes ſpatio dierum 4 æqualem ſummam nummorum. Unus quotidiè diſtribuit nummos 7: alter primo die unum; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, adjecto tamen ſemper adhuc aliquo nummorum numero ſuper eodem. Quantum ergo dedit quotidie? & quanta eſt ſumma tota?

Solve problema XVIII. reperies eum, qui primo die expendit nummum unum, ſecundo die expendiſſe 5, tertio 9, quarto 13, & ſummam totam 28.

De Progreſſione Geometricâ, tum finitâ, tùm infinitâ.

PRogreſſio Geometrica eſt ſeries numerorum, ſeſe mutuò eâdem proportione excedentium, ſive eſt quælibet proportio per plures terminos, quàm duos continuata. Si proportio continuatur per terminos creſcentes, dicetur progreſſio aſcendens; deſcendens verò, ſi per decreſcentes. Porro cum progreſſio quælibet Geometrica, vel finita eſſe poſſit, vel infinita, ſeu indefinita, hoc eſt, continuari per terminos multitudine finitos, vel infinitos; de hac librum prorſus inſignem ſcripſit Gregorius a S. Vincentio; de illâ ſolâ Arithmetici meminere. Quod ſanè miror, quando (ut oſtendi ad Prop. XXXV. L. IX., & ex dicendis hoc Capite planum fiet) faciilimus fit a finitâ ad infinitam tranſitus.

De

De utrâque igitur acturus hìc ſum, oſten-damque, quod ab aliis hactenus animadverſum non reperio; progreſſionis infinitæ myſterium omne in progreſſione finitâ, Arithmeticis jam pridem notâ, latere. Quod priuſquam aggrediar, neceſſaria quædam præmitto.

I. Denominator X proportionis, numericæ ſcilicet, ſeu rationalis *a* ad *b*, eſt numerus ita ſe habens ad unitatem, ut major terminus *a* ad minorem *b*. Reperitur, ſi major *a* dividatur per minorem *b*. Quotiens enim X eſt denominator quæſitus. Nam quotiens omnis ita eſt ad unitatem, ut diviſus *a* ad diviſorem *b*. Quando quotienti adhæret fractio, ea ad minimos terminos eſt revocanda: imò, ut uſui denominator ſit, integer ad fractionem ſibi adhærentem revocandus eſt, ut vides in Z.

a. 35
b. 15

$2\frac{1}{3}$ — X

$\frac{7}{3}$ — Z Un.

II. Si denominator eſt numerus integer, quod tum accidit, cùm minor numerus majorem metitur; unitas, & denominator ſunt minimi termini, ad quos proportio data reduci poteſt.

III. Si denominator eſt integer *c* cum fracto, quod tum eveniet, cùm minor proportionis terminus *a* majorem *b* non metitur, tunc minimi termini quibus data proportio *a* ad *b* exprimi poteſt, ſunt duo numeri; ac proinde minimos proportionis terminos non ingreditur unitas.

a 35
b 15

1 d 7 f
c 2 ——
3 e 3 e
Uni
o m
2 c ——
n n

ſtrati

lhære
d min
; ſit *d*
le *d*,
c, *e* p
C. IV
d, *e*.
tio *f*
or *c*,
ld *b*.
& : 1
Expr
n. Q
ſt ut
dem
er *e*,
o, *n*
C. II.
n n
r eſt
o *d*,
Mi
prin
I

CAP. IV.

Progreſſionis Geometricæ finitæ; & infinitæ affectiones.

THEOREMA I.

Proportio quælibet a *ad* b *continuatur aſcendendo, ſi denominator* z *multiplicet terminum majorem* b; *deſcendendo; ſi denominator* z *dividat terminum minorem* a:

Demonſtratio.

Z multiplicans *b* gignat *m*. Ut 1 eſt ad denominatorem z, ita *a* eſt ad *b*. Atqui ex definitione multiplicationis, etiam ut 1 eſt ad z,

Uni. $\frac{3}{2}$ Z.

h	g	f	a	b	m	n	o
$\frac{32}{9}$	$\frac{16}{3}$	8.	12.	18.	27.	$\frac{81}{2}$	$\frac{243}{4}$.

ita multiplicatus *b* ad productum *m*. Ergo, ut *a* eſt ad *b*, ita *b* eſt ad *m*. Quod erat primum. Deinde z dividens *a* gignat quotientem *f*. Per definitionem diviſionis diviſus *a* eſt ad diviſorem z, ut quotiens *f* eſt ad 1. Ergo permut. diviſus *a* eſt ad *f*, ut diviſor z ad 1. Atqui etiam eſt, ut z ad 1, ita *b* ad *a*; cum z ſit denominator rationis *b* ad *a*. Ergo *b* eſt ad *a*, ut *a* ad *f*. Quod erat alterum.

THEO-

THEOREMA II.

Omnis proportio, tam aſcendendo, quàm deſcendendo, continuari poteſt per terminos infinitos.

Demonſtratio.

Data ſit ratio quævis *a* ad *b*, cujus denominator z. Poteſt major terminus multiplicari per denominatorem, & productum *m* rurſus per z, & ſic in infinitum. Atqui, per Theor. I, ſic ratio data continuatur aſcendendo. Ergo &c. Pari ratione poteſt minor terminus *a* dividi per denominatorem z, & quotiens *f* rurſum dividi per z, atque ita in infinitum. Sed per Theor. I. ita continuatur ratio data deſcendendo. Ergo &c. *Termini tamen non erunt ſemper integri numeri, ut patebit ex Theor. IV.*

THEOREMA III.

Omnis proportio multiplex, aſcendendo continuari poteſt per infinitos numeros integros; deſcendendo tamen non ſemper uſque ad unitatem.

h	g	f	a	b	m	n	o.	
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	Den. 2.

Demonſtratio I. Partis.

CUjuſcunque rationis multiplicis minor terminus *a* metitur majorem *b*, ac proinde ejus denominator eſt numerus integer, qui multiplicans *b* producit tertium terminum integrum *m*, & multiplicans *m*, producit quartum integrum *n*. Et ſic in infinitum.

m. l. k. a. b. p. q.
3 Den. 2.
—3 6 12 24 48 96
2.

Demonſtratio II. Partis.

EX præc. patet, ut deſcendendo continuetur ratio data *a* ad *b*, debere minorem terminum *a* dividi per denominatorem, qui cum non ſemper metiatur terminos, quos diviſurus eſt, provenient quandoque quotiens non integri numeri. Ut in ſerie hic appoſitâ denominator 2 dividens *a* gignit quotientem *k*; & dividens *k* quotientem *l*; dividens verò *l*, quem non metitur, gignit quotientem *m*.

Corollarium.

CUm omnis progreſſio ab unitate incipiens terminis conſtet multiplicem proportionem habentibus; patet ex theoremate, eam poſſe per integros numeros infinitos continuari.

THEOREMA IV.

Nulla proportio, quæ multiplex non ſit, per numeros integros continuari poteſt, ſeu aſcendendo in infinitum, ſeu deſcendendo uſque ad unitatem.

Demonſtratio.

Proportionis *a* ad *b*, quæ multiplex non eſt, hoc eſt cujus minor terminus non metitur majorem, denominator non eſt numerus integer. Ergo, ut in præmiſſis num. III. demonſtravi, minimos terminos, quibus exprimi ea poteſt, non ingreditur unitas: ſed ii ſunt duo numeri, proinde per XXIV. VII. inter ſe primi ſunt. Quare, per XVI. IX., nequit illis reperiri tertius proportionalis; ac proinde neque aſcendendo, neque deſcendendo data proportio in his terminis continuari poteſt. Jam verò, per Pro. II. L. VIII. exhiberi poteſt progreſſio proportionis datæ conſtans tribus terminis integris; item alia progreſſio terminorum 4; item alia terminorum 5; atque ita infinitæ progreſſiones diverſæ per II. VIII. reperiuntur, omnes terminis diverſis conſtantes, quarum unaquæque unum terminum habet ampliùs, quàm prior. Verùm, quia in ſingulis hiſce progreſſionibus datæ proportionis, extremi termini in Pro. II. L. VIII. jam citatâ demonſtrantur eſſe primi inter ſe, earum nulla continuari ulteriùs poteſt, ut patet ex XVII. L. IX. Nulla igitur proportio, quæ multiplex non ſit, &c. *Q. E. D.*

l *k* h g f a b m n o p

$\frac{16}{3}$ 8 12 18 27 $\frac{81}{2}$ Den. $\frac{2}{3}$ Z

Si quæras, quouſque ſinè fractis continuari poſſit, reſpondeo, id ex ipſo opere continuationis innoteſcere. Ut ſurſum continues rationem *a* ad *b*, ducendus eſt denominator *z* in terminum majorem *b*, per Theor. I. Quia verò denominator *z* integer numerus non eſt, qui producetur, neceſſariò fractus erit: qui ſi ad integrum reduci poteſt per ea, quæ traduntur Prob. IV. C. III. L. II. continuabitur per illum adhuc integrum ratio data *a* ad *b*; ſi non poſſit, quod continget, ſi denominator numeratorem non metiatur, non poterit per integros numeros ratio *a* ad *b* ulteriùs continuari.

THEOREMA V.

PRogreſſio Geometrica, cujus extremi numeri ſunt primi inter ſe nec ſurſum, nec deorſum ulteriùs poteſt per numeros integros continuari.

Demonſtratur Prop. XVII. Lib. IX.

THEOREMA VI.

IN omni progreſſione geometricâ incipiente ab unitate ſecundus terminus, (unitas inter terminos non computatur,) quartus, ſextus, & reliqui omnes locorum parium ſunt quadrati.

Ter-

0	1	2	3	4	5	6	7	8
.	a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Tertius, ſextus, nonus, & reliqui, duobus intermiſſis, omnes, quorum videlicet exponentes metitur ternarius, ſunt cubi.

Sextus, duodecimus, decimusoctavus, & reliqui omnes, quorum exponentes metitur ſenarius, ſunt quadrati ſimul & cubi.

Quintus, ſeptimus, undecimus, decimuſtertius, & reliqui omnes, quorum exponentes ſunt primi numeri, neque quadrati ſunt, neque cubi.

Demonſtrantur hæc omnia in Prop. VIII. Lib. IX. ejuſque ſcholio. *Exponentes ſunt numeri ſeriei naturalis ab unitate, indicantes loca terminorum progreſſionis.*

THEOREMA VII.

IN progreſſione geometricâ trium terminorum bb *quadratus medii (hoc eſt medius in ſe ipſum ductus) producto* ac *extremorum æqualis eſt.*

a	b	c	
2	4	8	
	bb	ac	
	16	16	

Demonſtratur Prop. XX. Lib. VII.

THEOREMA VIII.

IN *progreſſione Geom. quatuor terminorum, productum* ad *extremorum æquatur producto* bc *mediorum. Idem verum eſt in quibuſcumque quatuor proportionalibus, licèt non continuè: ut ſi* f *ſit ad* g, *ut k ad* m; f m *productum ab extremis æquatur* g *k producto a mediis.*

a	b	c	d
2	4	8	16

ad	bc
32	32

f	g	*k*	m
2	6	4	12

fm	gk
24	24

Demonſtratur Prop. XIX. Lib. IX.

THEOREMA IX.

IN *omni geometricâ progreſſione,* a f *producta extremorum, & producta* be, cd, *terminorum æqualiter ab extremis diſtantium inter ſe æqualia ſunt.*

Demonſtratio.

QUoniam omnes *a, b, c, d, e, f,* ſive *a, b, c, x, d, e, f* ſunt continuè proportionales; manifeſtum eſt, *a* eſſe ad *b*, *ut e* ad *f*. Ergo per XIX. VII. *af* pro-

a	b	c	d	e	f
3	6	12	24	48	96

	af	
Producta	be	Æ 288
	cd	

a	b	c	x	d	e	f
3	6	12	24	48	96	192

productum ex pri-
mo *a* in quartum *f*
æquatur producto *be*
ex mediis *c*, & *e*.
Pari ratione erit *b* ad
c, ut *d* ad *e*. Ergo
genitus ex *b* in *e* æq
Q. E. D.

THEO

QUivis terminu
in ſe ductus a
bet, æqualiter ab i

De

SUmatur quicum
omnium medi
hyp. *c*, *x*, *d* ſun
Theor. IV., ſive p
aſſumpti *x*, æqual
c, & *d*. Atqui per
æquatur producto
ductus ex *b* in *e* æq
Liquet ergo propo

Nota pro ſequen
minorum progreſſi
cluſivè, vel, ſi pr
unitas, excluſivè
nis: id enim, ut d
eſt ad praxim. P
ſupra progreſſioni
dices, ſeu exponen
quiſque ſit ab un

ſive quot locis quiſque ab unitate, vel minimo termino diſtet. Supra unitatem ſcribitur 0, *ſupra* a *primum ab unitate ponitur* 1, *ſupra ſequentem* b 2, *& ſic deinceps ordine naturali.*

THEOREMA XI.

IN progreſſione geometrica cujus

1	2	4	8	16	32	64	128	256
0	1	2	3	4	5	6	7	8
	a	b	c	d	e	f	g	h

principium unitas eſt, ſi quivis terminus c *per ſe ipſum multiplicetur, producetur alius ejuſdem progreſſionis terminus* f, *locis duplo pluribus ab unitate diſtans.*

Demonſtratio.

EX Prop: XI. Lib. IX. Coroll. III. Et facilè etiam oſtenditur, ſi termini progreſſionis multiplicatione ſpecioſâ exprimantur.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a	aa	aaa	aaaa	aaaaa	aaaaaa	a7	a8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Ex Lemmate Prop. VIII. Lib. IX., & quia multiplicationis productum ſolâ litterarum appoſitione exprimitur patet, ex *a* primo in ſe fieri *aa* ſecundum, & ex *a* in *aa* fieri tertium *aaa*, & ex *a* in *aaa* fieri quartum *aaaa*, & ſic deinceps. Ex quo manifeſtum eſt, ſingulos terminos tot locis diſtare ab unitate, quot litteris ſcribuntur; & contra tot ſcribi litteris, quot diſtant ab unit. locis. Atqui ſi terminus quivis,

puta

puta tertius *aaa*, in ſe ducatur, productus *aaaaaa* duplo pluribus litteris ſcribitur, quàm ipſe. Ergo etiam duplo pluribus ab unitate diſtabit locis. *Q. E. D.*

THEOREMA XII.

IN progreſſione geometricá, cujus principium unitas eſt, ſi termini duo quilibet b, *&* e *invicem multiplicentur; eorum ab unitate diſtantiæ ſimul ſumptæ conficiunt producti* g *ab unitate diſtantiam.* Vide 1. Schema Theor. prec.

Demonſtratio ſimilis præcedenti. Exprimatur ſeries ſpecioſè. Et multiplicent ſeſe mutuò ſecundus *aa*, & quintus *aaaaa*. Eorum litteræ ſimul junctæ dant productum 17, ac proinde (ut oſtendi in præced.) etiam eorum junctæ diſtantiæ exhibent diſtantiam producti ab unitate. *Q. E. D.* V. Schema 2 prec.

THEOREMA XIII.

IN progreſſione Geometricá, cujus principium unitas non eſt,

0	1	2	3	4	5	6
a	b	c	d	e	f	g
3	6	12	24	48	96	192

ſi quivis terminus c *ſe ipſum multiplicet, & productus per minimum* a *dividatur; quotiens diſtabit ab minimo* a *locis duplo pluribus, quàm terminus ſe ipſum multiplicans* c.

Denom. q. 2

0	1	2	3	4	5	6.
a	aq	aqq	aqqq.	aqqqq.	aqqqqq.	aqqqqqq.
3	6	12	24	48	96	192.

Demon-

Demonſtratio expeditur facillimè, ſi termini progreſſionis multiplicatione ſpecioſâ exprimantur. Per Theor. I. minimo termino *a* ducto in denominatorem *q* fit *aq* primus ab minimo; & primo *aq* ducto in denominatorem *q*, fit ſecundus *aqq*; & ex hoc in *q*, fit tertius *aqqq*; & ſic deinceps procreantur termini reliqui progreſſionis omnes. Ex quo patet, quemlibet terminum tot locis diſtare ab minimo *a*, quot in ipſo reperiuntur litteræ *q*, denominatorem exprimentes. Terminus jam quiſpiam, puta ſecundus *aqq*, ducatur in ſe, hoc eſt in *aqq*; productus *aaqqqq* continebit litteras illius bis, nimirum duo *a*, & duplo plura *q*, quàm producens *aqq*. Ergo ſi productus *aaqqqq* dividatur per minimum *a*, quotiens *aqqqq* ſcribetur uno *a*, & duplo pluribus *q*, quàm *aqq*, qui ſeipſum multiplicaverat. Quare cum jam oſtenderim, terminum quemlibet tot diſtare locis ab minimo *a*, quot in ipſo reperiuntur *q*, liquet quotientem *aqqqq* locis duplo pluribus diſtare ab minimo *a*, quàm *aqq* terminus ſe ipſum multiplicans. *Q. E. D.*

THEOREMA XIV.

Schema præc.

IN progreſſione geometricâ, cujus principium unitas non eſt, duo quivis termini c, *&* e *ſeſe invicem multiplicent, & productus per minimum* a *dividatur, quotientis diſtantia a minimo* a *æqualis erit ſe mutuò multiplicantium diſtantiis a minimo, ſimul junctis.*

Demonſtratio eſt ſimilis præcedenti, ut tantùm opus ſit exemplum adferre. Exprimatur ſeries ſpecioſè, ex qua ſe mutuò multipli-

cent

ſint primus aq, & quartus $aqqqq$. Productum erit $aaqqqqq$, quo diviſo per minimum a, quotiens eſt $aqqqqq$, qui eſt quintus in progreſſione terminus, cujus diſtantia ab minimo a, eſt 5, quem efficiunt ipſorum aq, & $aqqqq$ diſtantiæ 1, & 4.

THEOREMA XV.

SI a maximo termino finitæ progreſſionis duplæ auferatur minimus, reliquus æquatur ſummæ progreſſionis dempto maximo.

a	b	c	d	e	f	g
3	6	12	24	48	96	192

Minimus a, 3, auferatur ex maximo g, 192. Reliquus 189 æquatur omnibus a, b, c, d, e, f, hoc eſt toti ſummæ, dempto maximo g.

Demonſtratum eſt in Coroll. IV. Prop. XXXV. Lib. IX.

THEOREMA XVI.

IN omni finitâ progreſſione geometricâ, ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita maximi, & minimi termini differentia (ſive maximus dempto minimo) eſt ad totam progreſſionis ſummam dempto maximo.

Demonſtratum eſt in Coroll. I. Prop. XXXIV. Lib. IX.

Corol-

Corollarium.

ITaque exceſſus maximi termini ſupra minimum in progreſſione duplâ æqualis eſt ſummæ reliquorum; (hoc eſt omnibus dempto maximo) in progreſſione triplâ duplus: in progreſſione quadruplâ triplus; & ſic deinceps.

Demonſtratio patet ex hoc Theoremate.

THEOREMA XVII.

Schema Theor. 25. *IN omni progreſſione geometricâ finitâ, ut duorum maximorum* f, g *terminorum differentia eſt ad maximum* g, *ita maximus* g *dempto minimo* a *eſt ad totam progreſſionis ſummam dempto minimo.*

Demonſtr. eſt Coroll. V. Prop. XXXV. Lib. IX.

THEOREMA XVIII.

SI progreſſio quæcumque geometrica deſcendendo continuetur in infinitum; ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita primus, ſeu maximus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam.

Dentur exempli gratia duo termini proportionis triplæ 54, & 18, & progreſſio inſtituatur *a*, *b*, *c*, *d* &c., con-

a	b	c	d	e	f	g	h	k
54	18	6	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{243}$

M 27

tinue-

tinueturque per Theorema II. deſcendendo, (hoc eſt per terminos proportionaliter decreſcentes in infinitum. Ut denominator 3 unitate mulctatus, nempe 2, eſt ad unitatem, ita primus terminus 54 eſt ad ſummam reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, &c.

Demonſtratio.

PEr Theor. XVI. in progreſſione finitâ, ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem; ſic primus, ſeu maximus terminus, dempto minimo, eſt ad ſummam reliquorum. Quare cum in progreſſione per decreſcentes in datâ proportione terminos in infinitum continuatâ, minimus terminus evaneſcat) ut oſtenſum eſt in Elementis noſtris Geom. in Schol. Prop. XI. Lib. VI. Lem. II.) erit, ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita primus terminus ad reliquorum infinitorum ſummam. *Q. E. D.*

Vides, opinor, qui hæc legis, quàm facilis ſit, quod ſupra me oſtenſurum promiſeram, a progreſſione finitâ ad infinitam tranſitus. Unde mirum eſt, priores Arithmeticos, qui progreſſiones finitas tenerent, infinitas ignoraſſe, cum hæ ab illis immediate dependeant. Theorema ſiquidem XVI. ex quo demonſtratio hujus facillimè deducta eſt, Corollarium eſt Prop. XXXV. Lib. IX.

Idipſum apparebit ex Corollario ſequenti, ex Theorematis XIX. XX. & Coroll. Theor. XIX. ex Problematis VII. VIII. IX. X. XI.

Corol-

Corollarium.

PRimus terminus reliquorum infinitorum ſummæ in progreſſione duplâ æqualis eſt; in progreſſione triplâ duplus; in progreſſione quadruplâ triplus; in quintuplâ quadruplus; & ſic deinceps.

Patet ex Theoremate.

THEOREMA XIX.

SI progreſſio geometrica deorſum continuetur in infinitum, ut duorum primorum, hoc eſt maximorum terminorum differentia eſt ad ſecundum terminum, ita primus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam.

Demonſtratio.

PEr prop. XXXV. l. IX. in progreſſione finitâ ut primorum ſeu maximorum terminorum differentia eſt ad ſecundum, ita primus, dempto minimo eſt ad ſummam reliquorum. Quare cum in progreſſione deſcendendo in infinitum continuatâ minimus terminus evaneſcat, erit ut primorum differentia ad ſecundum, ita primus ad reliquorum infinitorum ſummam. *Q. E. D.*

Theorema convenit tam magnitudinibus, quàm numeris, quemadmodum & Prop. XXXV IX. a qua dependet. Cæterùm hic rurſus apparet, quàm expeditè a finitis progreſſionibus ad infinitas tranſeatur.

THEO-

THEOREMA XX.

*I*IJſdem poſitis, ſi primorum duorum termino-
rum differentia ax, primus terminus ab, &
az ſint continuè proportionales; erit az tota
terminorum infinitorum ſumma.

a—x——b——c—d—e——z

Demonſtratio.

QUoniam *ax* eſt ad *ab*, ut *ab* eſt ad *az*,
invertendo *ba* ad *xa*, ut *za* ad *ba*. I
dividendo *bx* ad *xa*, ut *zb* ad *ba*.
tur invertendo *ax* (differentia primoru
& *bc*) eſt ad *bx*, ſeu *ac* ſecundum, ut
mus eſt ad *bz*. Ergo per Theor. XVIII
ſumma omnium, dempto primo *ab*. I
eſt ſumma tota. *Q. E. D.*

Corollarium.

QUando igitur progreſſionis
duo maximi termini *k*, *l*
ſolùm unitate differunt,
quadratus primi termini æquatur
reliquorum infinitorum ſummæ.
Demonſtratio patet ex hoc
XVIII. I. IX. Tunc enim duor
differentia eſt I, quæ dividens
ximi termini, per XVIII. IX.
proportionalem, ipſum vide
quem dividendo non mutat.

THEOREMA XXI.

Progreſſionis geometricæ admiranda incrementa.

Multa hanc in rem afferri ſolent. Unum ego afferam, ſed illuſtre, & quàm breviſſimè oſtendam: videlicet progreſſionis decuplæ, incipientis ab unitate, trigeſimum ſeptimum terminum plures continere unitates, quam arenas contineat orbis terræ: & ſi primus terminus ſtatuatur arenula, trigeſimum ſeptimum ab illo futurum toto terrarum orbe majorem.

Ratiocinatio formabitur hunc in modum.

Scribit Archimedes in arenario, ſe compeꝛiſſe, 35 grana papaveris longitudinem digiti Geometrici excedere. Sed ponamus ea eſſe minora, & grana 40 efficere digitum.

Quoniam igitur milliare continet 80, 000 digitorum; continet enim 5000 pedum, quæ ducta in 16 digitos in uno contentos efficiunt 80, 000: ſi hæc ducantur in 40 grana unum pedem æquantia, fiunt 32 00, 000, numerus granorum conficiens milliare unum.

Jam ex Aſtronomis nemo diametro Terræ tribuit milliaria 10, 000. Sed demus, eam eſſe tantam. Igitur ſi 10, 000 ducantur in grana unius milliaris, nempe in 3, 200, 000, provenient grana 32, 000, 000, 000, quæ continet Terræ diameter. Verùm pro duabus notis 32 ſubſtituamus has 100, ut fiat numerus rotundus A, granorum Terræ diametrum componentium, qui prioris plus quàm triplus eſt, adeoque & Terræ diameter ex hoc capite

rurſum

rurſum augebitur plusquàm triplo, fietque major 30, 000 milliariorum. Erit igitur ut 1 ad numerum A, ita grani diameter ad diametrum Terræ. Per Lem. 2 in ſchol poſt XI. Lib. VI.

1. Gran.
A. 100, 000 (000000
B. 10, 000 (000000 (000000 (000000
C. 1, 000 (000000 (000000 (000000 (000000 (000000 cyf. 33.

Continuetur ratio 1 ad A per quatuor terminos 1, A, B, C. Erit per XVIII. Lib. XII. ut 1 ad C, ita grani ſphærula ad ſphæram Terræ, quæ proinde continet numerum granorum C. Is verò præter unitatem habet cifras 33. Cum enim primus A habeat cifras 11, ſecundus B habebit 22, & tertius C 33; ut patebit ex Probl. I. infra.

Ut jam cognoſcantur arenæ orbis Terræ, inveniendæ tantùm erunt arenæ unius grani. Certum eſt, grani ſphærulam non continere arenas 10,000. Si ergo C numerus granorum Terræ ducatur in 10, 000, proveniet D numerus arenarum, totum globum Terræ componentium; non illum quidem, qui de facto eſt, ſed alium longè majorem illo, cum & grana aſſumpſerim minora, quàm ſint, & arenas uni grano dederim juſto plures, & diametrum terræ poſuerim multò plus, quàm triplo majorem verâ: ex quo poſtremo ſolo, cæteris neglectis, ſphæra ex arenis D compoſita, per XVIII. Lib. XII. plus quàm vigeſies ſepties orbe noſtro toto major eſt.

D

10 (000000 (000000 (000000
(000000 (000000 (000000

Eſt porro numerus D, quia conſtat unitate, & cifris 37, terminus trigeſimus ſeptimus progreſſionis decuplæ 1, 10, 100 &c. ut patebit ex Prob. I.

Scio, minori numero quæſitum obtineri poſſe, ſi aliter calculus inſtituatur. Sed quia id parum intereſt ad finem hic intentum, hanc viam, cæteris breviorem, ſecutus ſum.

THEOREMA XXII.

PErinde admiranda ſunt progreſſionum geometricarum decrementa, atque incrementa.

Quemadmodum enim ab unitate per 37 terminos proportionis decuplæ aſcendendo pervenitur ad numerum, qui multo major fit numero arenarum totam telluris molem componentium; ita viciſſim ab illo prope immenſo numero, per 37 terminos proportionis decuplæ deſcendendo, devenitur ad unitatem. Et quemadmodum ab arenulâ minimâ aſcendendo per proportionis decuplæ terminos 37 ventum fuit ad magnitudinem toto terrarum orbe majorem; ita viciſſim ab ingenti illâ mole orbis terrarum deſcendendo per decuplæ proportionis 37 terminos venietur ad arenulam.

CAP.

CAP. V.

Progreſſionis geometricæ finitæ, ac infinitæ Problemata.

PROBLEMA I.

DAtam progreſſionem geometricam tam ſurſum, quàm deorſum continuare in infinitum.

Conſtructio habetur ex Theor. I., & II. Quædam ſolummodò hìc adnotanda ſunt.

I. Progreſſionis, ab unitate incipientis, denominatorem eſſe terminum ab unitate primum. Patet ex definitione denominatoris.

II. Cum termini progreſſionis conſtant unitate, & cifris, ſolâ cifrarum primi poſt unitatem termini additione cæteros terminos procreari, ut in Theor. XXI. quia A primus habet cifras 11; ſecundus B habebit 22 cifras; tertius C cifras 33, & ſic deinceps. Patet ex Theor. I. & ex ipſo multiplicationis opere.

III. Terminum quemlibet progreſſionis decuplæ 1, 10, 100 &c. tot locis diſtare ab 1, quot cifras habet. Patet ex II. hìc.

PROBLEMA II.

PRogreſſionis geometricæ, ab unitate incipientis, terminum quemcumque, licet cogniti non ſint omnes medii, exhibere.

Res tota pendet ex XI, & XII. Theor. Da-

ta ſit exempli gr. progreſſio dupla ab 1, cujus oporteat terminum quadrageſimum tertium invenire.

Continuetur progreſſio per aliquot terminos, quouſque

0	1	2	3	4	5
1.	2.	4.	8.	16.	32.

nimirum poteſt abſque ullâ moleſtiâ, (hic facilè continuabis uſque ad quintum,) & ſupra ſingulos ſcribantur exponentes. Duc quintum 32 in ſe: proveniet decimus 1024 per Theor. XI. Hoc rurſum in ſe ducto, prodibit 1048576 vigeſimus per idem Theor. Quo etiam ducto in ſe, fit quadrageſimus 1(099,511(627,776, cujus exponens eſt 40: quæritur autem terminus exponentis 43. Differentia exponentium inventi 40, & quæſiti 43 eſt 3. Terminum igitur exponentis 3, nempe 8, duc in terminum jam inventum exponentis 40: producetur terminus exponentis 43 quæſitus, ut patet ex Theor. XII., nimirum 3(796,093(022,208.

Simili modo per XI, & XII. Theor. facile erit, quemvis terminum cujuſcumque progreſſionis reperire.

PROBLEMA III.

Progreſſionis geometricæ, cujus principium non eſt unitas, quemcumque terminum, licet cogniti non ſint omnes medii, invenire,

Praxis tota pendet ex Theor. XIII, & XIV. Data ſit progreſſio *a* ad *b*, cujus oporteat terminum vigeſimum nonum reperire.

Con-

Continuetur progreſſio per aliquot terminos, puta tres, & ſingulis ſuos exponentes ſupraſcribe.	0	1	2	3
	a	b	c	d
	2.	6.	18.	54.

Ducatur deinde tertius in ſe, & producto diviſo per *a*, proveniet ſextus. Hoc rurſum in ſe ducto, & diviſo per *a*, habetur duodecimus. Quo etiam in ſe ducto, ac diviſo per *a*, prodibit vigeſimus quartus, cujus diſtantia, ſeu exponens 24 deficit ab 29 exponente quæſiti, defectu 5. Aſſumo ergo duos exponentes, ut 3, & 2, qui juncti faciunt 5; & termino quidem exponentis 3 ducto in terminum jam inventum exponentis 24, & diviſo producto per *a*, habetur vigeſimusſeptimus: quo rurſum ducto in terminum exponentis 2, ac diviſo per *a*, habetur vigeſimusnonus, qui petebatur.

Demonſtratio patet ex Theor. XIII., & XIV. Simili methodo, quilibet alii termini reperientur.

PROBLEMA IV.

Progreſſionis duplæ finitæ ſummam exhibere.

	a	b	c	d	e	f	g
A maximo termino *g* aufer minimum *a*. Reſiduus omnibus antecedentibus *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a* æqualis eſt, per Theor. XV.	3	6	12	24	48	96	192

g 192
a 3
——
189

PROBLEMA V.

Cujuſcumque progreſſionis geometricæ finitæ ſummam exhibere.

Maximus terminus ſi non datur, inveniatur per Probl. II, vel III. A maximo aufer minimum. Reſiduum divide per denominatorem progreſſionis, unitate mulctatum: quotiens æqualis erit toti ſummæ, dempto maximo.

Demonſtratio.

Per Theor. XVI. ut denominator unitate mulctatus eſt ad 1, ita maximi, & minimi differentia eſt ad ſummam reliquorum. Ergo per XIX. Lib. IX. quartus proportionalis, reliquorum nempe ſumma invenitur, ſecundum (qui eſt unitas) ducendo in tertium (maximi nempe, ac minimi differentiam), & productum, hoc eſt differentiam ipſam (ea quippe ducta in 1 non immutatur) dividendo per primum, nempe per denominatorem unitate mulctatum.

Exem-

Exempla.

k	m	n	o	p	q	r
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

3. den.

a	b	c	d	e	f	g
2.	3.	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{8}$	$\frac{243}{16}$	$\frac{729}{32}$

$$q \frac{1}{2} S \frac{3}{2} \text{denom.} \quad l. \frac{665}{32} \left\{ V \; \frac{1330}{32} \right.$$

DEtur progreſſio tripla *k*, *m*, *n*, &c. Denominator unitate mulctatus eſt 2. A maximo *r* aufer minimum *k*. Reſiduum 728 divide per 2. Quotiens 364, æquatur omnibus antecedentibus *q*, *p*, *o*, *n*, *m*, *k*.

Detur deinde progreſſio ſeſqui-alteræ proportionis *a*, *b*, *c* &c. Aufer minimum *a* ex maximo *g*: reſiduum eſt *l*. Ex denominatore S aufer unitatem: reſtat *q*. Per *q* divide reſiduum *l*, maximi nempe, & minimi differentiam. Quotiens V æquatur omnibus maximum antecedentibus *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*.

PROBLEMA VI.

CUm progreſſio datur finita proportionis multiplicis, ejus ſumma adhuc aliter reperitur per Coroll. Theorematis.

Si datur progreſſio duplorum, exceſſui pri-

mi termini ſupra minimum adde æqualem numerum.

Si datur progreſſio triplorum, eidem exceſſui adde dimidiam ejus partem.

Si datur progreſſio quadruplorum, exceſſui adde tertiam ejus partem.

Et ſic deinceps: hac additione habebitur tota ſumma terminorum omnium dempto minimo, ut patet ex citato ſupra Corollario.

PROBLEMA VII.

PRogreſſionis geometricæ cujuſcumque per infinitos terminos deſcendentis ſummam exhibere.

Primus terminus dividatur per denominatorem progreſſionis unitate mulctatum: quotiens primo termino adjunctus exhibet totam ſummam terminorum infinitorum progreſſionis datæ.

Demonſtratio.

PEr XVIII. Theor. ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita primus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam. Cum hæc igitur illis tribus ſit quarta proportionalis, exhibebitur ipſa per Prop. XIX. IX. ſi ſecunda quantitas ducatur in tertiam, unitas nempe in primum progreſſionis terminum, & productum, hoc eſt primus ipſe terminus (is enim ductus in 1 non immutatur) dividatur per denominatorem unitate mulctatum, qui ex quatuor proportionalibus erat primus.

Exem-

Exemplum.

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ 512 & 64 & 8 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & \frac{1}{512}\ \&c. \end{array}$$

8. Denom.

$$P\ 73\frac{1}{7} \qquad Q\ 585\frac{1}{7}$$

Data ſit progreſſio proportionis octuplæ, per infinitos terminos deſcendens. Primus *a* ſi dividatur per denominatorem unitate mulctatum, hoc eſt per 7, quotiens erit P. Igitur P æquatur toti ſummæ infinitorum, dempto primo *a*. Quare ſi P addatur ad *a*, fiet Q æqualis infinitis terminis, in proportione octuplâ decreſcentibus *a*, *b*, *c*, *d*, &c.

Aliud.

$$\begin{array}{cccc} k & m & n & o \\ 25 & 20 & 16 & \frac{64}{5}\ \&c. \end{array}$$

$$\frac{5}{4}\ \text{den.} \qquad \frac{1}{4}\ p$$

Data ſit progreſſio *k*, *m*, *n*, *o* &c. Hujus denominator unitate mulctatus eſt *p*. Per hanc diviſo primo termino, *k*, 25, quotiens proveniet 100, quibus additis ad primum terminum, fit numerus 125 æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PRO-

PROBLEMA VIII.

Progreſſionis geometricæ cujuſcumque per infinitos proportionales terminos deſcendentis ſummam aliter exhibere.

Per exceſſum primi termini ſupra ſecundum divide quadratum primi termini: quotiens toti ſummæ infinitorum proportionalium æqualis eſt.

Demonſtratio patet ex Theor. XX., & ex XVIII. Lib. IX.

Exemplum.

Repetatur progreſſio antecedens, *k*, *m*, *n*, *o* &c. Exceſſus primi termini ſupra ſecundum eſt 5. Quadratus primi 25 eſt 625: quo diviſo per exceſſum 5, fit quotiens 125, æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA IX.

Progreſſionis multiplicis per infinitos terminos deſcendentis ſummam aliter invenire.

Si datur progreſſio dupla, ut 12, 6, 3 &c. primo termino adde æqualem.

Si tripla, ut 9, 3, 1, &c. primo termino adde partem ejus dimidiam.

Si quadrupla, ut 16, 4, 1 &c. primo termino adjice partem ejus tertiam.

Si quintupla, ut 25, 5, 1 &c. primo termino adde partem ejus quartam: atque ita deinceps.

ceps. Hac additione ſumma procreabitur æqualis toti progreſſioni proportionalium infinitorum.

Demonſtratio patet ex Coroll. Theorematis XVIII.

PROBLEMA X.

PRogreſſionis ſuper-particularis per infinitos terminos deſcendentis ſummam aliter invenire.

Cum proportio ſuper-particularis ſit, quando major terminus *a* minorem *b* continet ſemel, & unam ejus aliquotam, numerus aliquotam denominans ſit *m*.

Primus terminus per hunc *m* multiplicatus æquatur toti ſummæ infinitorum reliquorum *b*, *c*, *d*, *e*, &c.

a	b	c	d	e
16	12	9	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{16}$

den. $1\frac{1}{3}\frac{n}{m}$ 64 Z

x48

Demonſtratio.

DEnominator proportionis ſuper-particularis eſt unitas cum fracto, cujus numerator eſt unitas, nominator verò ipſe numerus *m* aliquotam denominans. Ergo denominator progreſſionis ſuper-particularis unitate mulctatus eſt ſola illa fractio *n*, *m* per quam diviſo primo *a*, proveniet ſumma reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, &c. ut patet ex Probl. VII. Atqui primus terminus *a* dividitur per fractum

n, *m*,

n, *m*, cum per eumdem inverſum multiplicatur; multiplicatur verò per illum inverſum primus *a*, ſi ſolus nominator *m* multiplicet primum *a*, cum numerator *n* ſit unitas, quæ omnia patent ex Cap. VII. Lib. II. Ergo ſi *n* numerus aliquotam denominans multiplicet primum *a*, habetur ſumma reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, &c. *Q. E. D.*

PROBLEMA XI.

Progreſſionis geometricæ, cujus primi duo termini differunt unitate per infinitos terminos deſcendentis, ſummam aliter exhibere.

Ducatur primus terminus in ſe ipſum, ut habeatur ejus quadratus. Is toti infinitorum proportionalium ſummæ æqualis eſt.

Demonſtratio patet ex Coroll. Theor. XXX. $9\;\; 8\;\; 7\frac{1}{9}$ &c.

Exemplum.

Data ſit progreſſio proportionis 9 ad 8. Primi termini quadratus 81 infinitis hujus progreſſionis terminis æqualis eſt.

Præcedentia quinque Problemata, quæ artificio longè facillimo progreſſionis, per infinitos terminos deſcendentis exhibent ſummam, deducta ſunt, vel ex Theoremate XVIII. ejuſque Corollario, vel ex XX. illa verò nullo negotio ex progreſſione finitâ deduxi. Liquet igitur, quod initio ſpoponderam, progreſſionis infinitæ myſterium omne in finitâ latere.

Cæte-

Cæterum aſſertiones Theor. XVIII. XIX. XX. *Capitis præcedentis, & conſtructiones Problematum* VII. VIII. X. XI. *capitis hujus quædam ſunt* P. Gregorii *in Lib.* II. *quadraturæ; quædam ex illo derivari poſſunt: quamvis ego, ut jam dixi, tam has, quàm illas, ex progreſſione finitâ, quæ ſimiles planè, ac infinita, affectiones habet, novâ quadam ratione deduxerim, ac demonſtraverim. Interim* P. *Gregorio ſua laus manet, & ea quidem eximia prorſus, & ſingularis, qui progreſſionum naturam libro integro ampliſſimè, ſubtiliſſimèque proſecutus eſt, ut cæteris nonniſi ſpicas ex ſuá meſſe colligendas reliquerit.*

PROBLEMA XII.

PRogreſſionis finitæ dato denominatore, ſummâ, & maximo termino, invenire minimum.

Denominator unitate mulctatus ducatur in ſummam omnium, dempto maximo. Productum z aufer à maximo. Reſtabit minimus.

Demonſtratio.

DEnominator unitate mulctatus dividens maximum, dempto minimo, quotientem produxit ſummam omnium præter maximum, ut patet ex Probl. V. Ergo ex definitione diviſionis ſi quotiens, nempe ſumma omnium præter maximum ducatur in denominatorem unitate mulctatum, producetur maximus, dempto minimo. Ergo ſi hoc productum auferatur ex maxi-

maximo, relinquetur minimus, qui quærebatur.

PROBLEMA XIII.

PRogreſſionis finitæ datâ ſummâ, denominatore, & minimo termino invenire maximum.

Denominator unitate mulctatus ducatur in ſummam omnium, & producto addatur minimus. Hoc aggregatum divide per denominatorem. Quotiens erit maximus quæſitus.

Demonſtratio hujus operationis patet ex Probl. V., & ex analyſi, per quam inventa eſt.

PROBLEMA XIV.

PRogreſſionis finitæ datis extremis, & omnium ſummâ invenire denominatorem, & ſingulos intermedios.

Maximi, ac minimi differentiam divide per ſummam omnium dempto maximo. Quoties unitate auctus eſt denominator, quo invento per Probl. I. habentur ſinguli termini.

Demonſtratio.

SI maximi, ac minimi differentia dividatur per denominatorem unitate mulctatum, per Probl. V. provenit ſumma omnium, dempto maximo. Ergo per Coroll. II. Prop. XVI. Lib. VII., ſi eadem maximi, ac minimi differentia dividatur per ſummam omnium, dempto

pro maximo, proveniet denominator unitate mulctatus. *Q. E. D.*

PROBLEMA XV.

PRogreſſionis infinitæ deſcendentis dato denominatore, & omnium ſummâ invenire maximum terminum, & reliquos.

Denominator unitate mulctatus ducatur in ſummam omnium: productum dividatur per denominatorem: quotiens erit maximus terminus.

Demonſtratio hujus operationis patet ex Probl. VII., & ex analyſi, per quàm inventa eſt.

PROBLEMA XVI.

PRogreſſionis infinitæ deſcendentis dato maximo termino; & omnium ſummâ, invenire denominatorem, & reliquos terminos.

Primum terminum divide per ſummam omnium dempto maximo. Quotiens unitate auctus erit denominator, quo invento, per Probl. I. habentur ſinguli termini.

Demonſtratio.

SI denominator unitate mulctatus dividat primum terminum, quotiens per Prob. VII. erit ſumma omnium, dempto maximo. Ergo ſi ſumma omnium, dempto maximo, dividat eumdem primum, quotiens erit denominator

unita-

unitate mulctatus, per II coroll. p. XVI. Lib. VII. Quotiens igitur unitate auctus erit denominator quæſitus. *Q. E. D.*

CAP. VI.

Quæſtiones circa progreſſionem geometricam.

Reliquum eſt, ut ex problematis jam allatis ad materiam nonnulla applicemus.

Quæſtio I.

Quanto tempore potuerit humanum genus propagari.

Statuamus, Adamum 20 annis genuiſſe 20 liberos, 10 mares, & 10 fœminas. His verò, & deinceps aliis, qui ab his deſcendent, ut ſinguli proles 20 gignant, paria ſcilicet 10 maris, ac fœminæ, demus annos 40; annis nempe 20, quibus apti ad generandum evadant, aſſignatis.

Adam igitur 20 annis genuit maris, ac fœminæ paria 10. Ab illis 40 annis ſequentibus gignentur paria 100. Ab his verò proximis 40 annis producuntur paria 1000: atque ita deinceps per ſingulos quadragenos annos inſtituetur progreſſio proportionis decuplæ; cujus terminus nonus, qui eſt 100000000 incidit in annum mundi 340. Quadragenâ igitur annum 340 complente naſcentur 1000 milliones parium: & quadragenâ complente annum mundi 380, decies mille milliones parium: ea verò,

quæ

quæ complet annum 420, parium 100 millia millionum: & ſic deinceps. Tandem in quadragenâ complente annum 620 naſcentur, paria hominum 10, 100(000000(000000, hoc eſt decies mille milliones millionum; is enim eſt progreſſionis decuplæ terminus decimus ſeptimus incidens in annum mundi 620, per additionem contiunam 40 ad 20 primos Adami annos. Quid ſi his addamus omnes præcedentium quadragenarum homines pleroſque adhuc ſuperſtites quanta multitudo ex ſolis 20 liberis Adami primo mundi vicenario procreatis exurget?

Atqui in hac hypotheſi habita ſolum fuit ratio unius vicenarii annorum Adam. Quot igitur tales ex Adami ætate accipiemus annorum vicenarios, tot habebimus progreſſiones generationum ſimiles, quarum quælibet annos mundi 20 plures continebit, quam progreſſio ipſam antecedens. Similiter ex ætatibus deſcendentium ſingulorum habita ſolum fuit ratio annorum a 20 uſque ad 40, ac ſi per reliquam vitam liberos nullos producerent. Quæ omnia, ſi in calculum deducantur, hominum multitudo adhuc multo amplior evadet: vel certè abundè compenſabunt ea, quæ in hypotheſi ſuperiori alicui videri poſſint liberaliùs aſſumpta.

Quæſtio II.

Quantum frumenti ex uno grano haberi poſſit intra annos 8.

RESpondeo, granorum plus, quàm decies mille milliones millionum.

 Nam

Nam granum unum plura ordinariè profert, quàm 100. Statuamus tamen proferre 100. Hæc ſequenti anno producent centies centum grana, hoc eſt 10,000. Atque ita progreſſio proportionis centuplæ inſtituetur per annos 8. Anno igitur octavo granorum numerus proveniet 10, 000 (000000 (000000, hoc eſt decies mille milliones millionum; is enim, ut patet ex Probl. I., eſt octavus terminus progreſſionis centuplæ. Qùod ſi hæc progreſſio per paucos adhuc annos continuetur, ne omnia quidem totius mundi horrea capient frumenti copiam ultimo anno provenientem.

Hinc apparet, quàm facilè peregrini fructus, olera, flores &c. in aliquam Provinciam advecti, intra annos non multos multiplicentur.

Quæſtio III.

STatuamus Beatiſſimæ Virgini Deiparæ hanc à Deo prærogativam eſſe datam, ut per ſingulos charitatis actus gratiam prius habitam duplicaret. Statuamus inſuper, gratiam intra primum annum, quo ratione fuerit uſa, acquiſitam, ita exceſſiſſe gratiam primo acceptam, ut hic numerus 18 (446, 774 (073, 709 (551, 615 unitatem. Quæritur, per quot actus tantam gratiam obtinuerit?

Reſpondeo per 64. Progreſſionis enim duplæ per 64 terminos continuatæ ſummæ conſtituit dictum numerum.

Quæ-

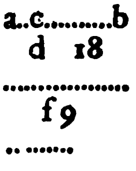
Quæſtio IV.

SI mobile quodpiam ita moveretur per totam æternitatem, ut primo die conficiat milliaria 9, ſecundo die milliaria 8, tertio 7, & 1 nonam; & ſic deinceps diebus ſingulis percurrat ſpatia, in proportione ſemper eâdem 9 ad 8 decreſcentia. Quæritur, omnia illa ſpatia percurſa æternitate totâ, ſi in unam ſummam colligantur, quot milliaria conficient?

Invenienda eſt ſumma progreſſionis per infinitos terminos proportionis 9 ad 8 deſcendentis: Ea verò eſt 81. Conficeret igitur mobile iſtud motu, eâ ratione in æternum continuato, non niſi 81 milliaria; hoc eſt, conficeret plus omni eo, quod minus eſt milliaribus 81, accederetque ad hunc terminum intervallo quovis dato minore, licet numquam pertingeret.

Quæſtio V.

ab 12
cb 10



DUo Viatores iter faciunt; primus quotidie abſolvit milliaria ab *12, ſecundus quotidie milliaria* cb 10, *ſed primum præceſſit milliaribus*, d 18. *Quæritur quo die, & poſt quot milliaria primus ſecundum aſſequetur:*

Problema, hac quæſtione contentum, a P. Gregorio a S. Vincentio applicatur Achilli teſtudinem inſequenti, & tum ab illo, tum ab aliis ex illo, ſolvitur per progreſſiones geome-

tricas, quæ cauſa fuit, cur id hoc loco adduxerim. Verùm independenter etiam a progreſſionibus & expeditiſſimè quidem ſolvitur hunc in modum.

Milliariorum, quæ uterque abſolvit quotidiè, differentia *ac* dividat milliaria *a*, quibus alter præceſſit: quotiens *f* 9 erit numerus dierum, quo primus ſecundum aſſequetur. Quod ſi *f* ducas in *ib* provenient milliaria 108, in quorum termino ſe invicem aſſequentur.

Demonſtratio.

QUoniam *ac* dividens *d* fecit *f*: ergo *ac* in *f* producit *d*; hoc eſt *ac* in *f* æquatur *d*. Quare ſi addatur utrique quod fit ex *cb* in *f*; erit *ac* in *f* cum *cb* in *f* æquale ipſi *d* cum *cb* in *f*. Atqui per I. Lib. II. *ac* in *f* cùm *cb* in *f* eſt *ab* in *f*. Ergo *ab* in *f*, (hoc eſt milliaria, quæ diebus *f* primus confecit) æquantur ipſi *d*, cum *cb* in *f* (hoc eſt milliaribus, quibus ſecundus præceſſerat, unà cum his, quæ confecit diebus *f*). Ergo in termino dierum *f* primus ſecundum aſſecutus eſt. *Q. E. D.*

CAP. VII.

De mediis quotcumque proportionalibus inter duos datos numeros.

INter duos datos numeros datam mediorum proportionalium multitudinem invenire, nihil aliud eſt, quàm progreſſionem geometricam exhibere conſtantem dato numero terminorum, cujus extremi duo ſint dati. Pertinet

igitur

igitur ad progreſſiones, quod hoc capite proponitur.

THEOREMA I.

Inter duos numeros A, B, qui ſe invicem multiplicantes quadratum numerum non producunt, medius proportionalis neque integer, neque fractus reperiri poteſt.

A2	5B
X	
C10	Z.

Demonſtratio.

Si enim poſſit, ille ſit X, qui in ſe ductus faciat Z. Ergo per XX. Lib. VII. factus ex A in B, nempe C, æquatur Z. Quare cum numerus X ſit radix quadrata Z, per conſtr. etiam numerus X erit radix quadrata facti ex A in B: quod eſt abſurdum, cum demonſtratum ſit Cap. VII. Lib. III. numeri non quadrati radicem, neque integro numero ullo, neque fracto explicabilem eſſe.

Aliter. Medius proportionalis inter A, & B eſſet radix quadrata quæſiti ex A ducto in B, ut patet ex xx. IX. At radix iſta, cum genitus ex A in B ex hypotheſi ſit non quadratus, nullo numero ſive integro, ſive fracto explicabilis eſt, ut oſtendi L. III. C. VII. Ergo inter A, & B nullus cadit medius proportionalis ſive integer, ſive fractus. *Q. E. D.*

Eſt illa igitur arcana indoles numerorum, ut quamvis quibuslibet duobus datis ſemper exhiberi poſſit tertius proportionalis ſaltem fractus, medius non ſemper poſſit.

Sed & hoc obſervatione dignum, inter quos numeros non cadit medius unus, inter eos poſſe exhiberi medios duos, aut plures. Exponatur ſeries progreſſionis duplæ; in hac 2, 1 2 4 8 16 32 64 128 *& 16 ſe invicem multiplicantes gignunt 32, qui quadratus non eſt, ac proinde inter eos unus medius non cadit: & nihilominus exhibentur inter eos medii duo, nempe 4, & 8. Pari modo 2 in 64 gignit 128, qui quia quadratus non eſt, inter 2, & 64 nequit reperiri medius unus, & tamen inter eos exhibentur medii quatuor, nimirum 4, 8, 16, 32.*

THEOREMA II.

X	a b c	Z	
	d	g	
	e	h	
	f	k	
	1		

DAti ſint duo numeri X, Z, vel primi abſolutè, vel primi inter ſe, alterutro exiſtente primo. Dico inter hos, aut quoslibet his proportionales nullos exhiberi poſſe medios proportionales ſive integros, ſive fractos.

Demonſtratio.

CAdant, ſi fieri poteſt, inter X, & Z primò medii proportionales integri quocumque numero, puta tres *a*, *b*, *c*. Quia ergo inter X, Z inter ſe primos cadunt tres medii; etiam per IX. Lib. VII. inter ipſos, & unitatem totidem medii cadent *d*, *e*, *f*, & *g*, *h*, *k*. Ergo per XI. Lib. IX. quilibet mediorum *d*, *e*, *f* metitur X, & quilibet ipſorum *g*, *h*, *k* metitur

Z, quod

Z, quod eſt abſurdum, cum alteruter datorum X, Z ponatur eſſe primus.

Cadant deinde inter X, Z, ſi fieri poteſt, medii proportionales fracti *ab*, *cd*, *ef*. Revocentur tam integri X, Z, quàm fracti medii ad fractiones ejuſdem nominis *op*, *lp*, *mp*, *np*, *ſp*. Erunt igitur etiam hæ continuè proportionales. Quia verò harum fractionum communis eſt nominator *p*, erunt per Theor. VI. C. II. L. II. numeratores *o*, *l*, *m*, *n*, *s* ipſis fractionibus proportionales;

$$X \quad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{e}{f} \quad Z$$

$$\frac{o}{p} \quad \frac{l}{p} \quad \frac{m}{p} \quad \frac{n}{p} \quad \frac{s}{p}$$

ac proinde etiam ipſi *o*, *l*, *m*, *n*, *s* continuè proportionales erunt. Igitur inter extremos *o*, & *s* cadunt medii proportionales integri *l*, *m*, *n*. Sed quia per conſtructionem X, & Z æquantur fractis *op*, & *ſp*, erit X, ad Z, ut fractus *op* eſt ad fractum *ſp*, hoc eſt, ut *o* ad *s*. Quare cum inter *o*, & *s* cadant integri proportionales medii *l*, *m*, *n*, etiam inter X, & Z cadent per VIII. Lib. VIII. totidem medii proportionales integri, quod fieri non poſſe, jam oſtenſum in primâ parte.

Eodem diſcurſu per VIII. L. VIII. demonſtrabitur, proportionales nullos reperiri medios inter numeros quoſcumque jam dictis proportionales.

PROBLEMA I.

INter duos datos numeros unum medium proportionalem invenire.

Dati numeri ſe invicem multiplicent. Producti radix quadrata eſt medius quæſitus. Quod ſi productus non ſit quadratus, Problema eſt impoſſibile, ut patet ex Theor. I.

PROBLEMA II.

INter duos datos numeros, quotcumque medios proportionales exhibere.

		A	B	
1	c	d	e	f
1	R4) c	R4) d	R4) e	R4) f
A	R4)m	R4) n	R4) p	R4) s

Dati ſint numeri A, B. Major B dividatur per minorem A, & quotiens ſit *c*. Inſtituatur progreſſio geometrica incipiens ab 1, & per terminos uno plures (unitate non computatâ) numero mediorum quæſitorum: ut ſi cupis duos medios, progreſſio continuetur per terminos tres; ſi tres medios, per quatuor; & ſic deinceps. In exemplo appoſito progreſſio conſtat, præter unitatem, quatuor terminis *c*, *d*, *e*, *f*, quia petuntur tres medii.

Ex hiſce terminis extrahatur radix cubica, ſi petantur medii duo; radix biquadrata, ſi tres; & ſic deinceps. In exemplo noſtro, quia petuntur medii tres, ex 1, *c*, *d*, *e*, *f* extrahantur radices biquadratæ, quæ ſic exprimuntur: 1 R4) c R4) d R4) e R4) f. Ducantur deinde hæ radices in A minorem datum, ut fiant A R4) m R4) n R4) p R4) s.

Dico, inter duos datos tres medios eſſe R4) m R4) n R4) p, ſi quidem numeri *m*, *n*, *p* ſint biqua-

biquadrati: ſin verò, Problema eſſe impoſſibile.

Demonſtratio.

QUoniam 1, *c*, *d*, *e*, *f* ſunt per conſtr. continuè proportionales, etiam radices eorum ſimiles 1, R4)c R4)d R4)e R4)f continuè proportionales erunt. Atqui A has multiplicans produxit A R4)m R4)n R4)p R4)s. Ergo, per XVII. VII. etiam hi producti erunt continuè proportionales; ac proinde inter A, & R4)s inventi ſunt tres proportionales medii R4)m R4)n R4)p. Quare, ſi oſtenderimus R4)s æquari B, liquebit propoſitum.

Quia per conſt. 1, *c*, *d*, *e*, *f* ſunt continuè proportionales, erit per VIII. Lib. IX. quartus *f* biquadratus radicis *c*. Ergo *c* eſt R4)f. Jam

A B

1	c	d	e	f
1	R4) c	R4) d	R4) e	R4) f
A	R4)m	R4) n	R4) p	R4) s

quia A dividens B fecit quotientem *c*, ergo A ductus in *c* producit B. Quare cum *c* ſit R4)f, etiam A ductus in R4)f producet B. Sed A ductus in R4) f produxit R4) s. Ergo R4) s eſt B. Inter A igitur, & B medii ſunt inventi tres R4)m R4)n R4)p.

Quod ſi numeri *m*, *n*, *p* non ſint biquadrati; eorum biquadratæ radices R4)m R4)n R4)p nullis poterunt numeris integris, fractiſve explicari, ut demonſtratum eſt Lib. III. Cap. VII.,

VII. ; ac proinde impoſſibile erit quæſitum Problematis.

C A P. VIII.

De Combinationibus, & Permutationibus.

HOc Capite, quod ad progreſſiones quaſi quædam appendix eſt, Arithmeticam hactenus explicatam, ac demonſtratam concludo.

Quamvis voces illæ combinatio, & permutatio promiſcuè poſſint accipi, viſum eſt hic tamen eas diſtinguere hunc in modum. Datus ſit certus rerum numerus, exempli gr. 10 litteræ. Si quæratur quot ex his 10 litteris haberi poſſint diverſi binarii litterarum, & quot diverſi ternarii, & ſic deinceps, dicentur quæri omnes combinationes diverſæ litterarum 10, quarum ſingulæ, & ſemper minori conſtant rerum numero, quàm is, qui datus eſt, & nulla rem eamdem bis continet, & nulla habet omnes res eaſdem cum ullâ alterâ. Quod ſi quæratur, quoties 10 illæ datæ litteræ miſceri inter ſe poſſint ſic, ut ſemper accipiantur omnes ſolo ordine mutato, dicentur quæri permutationes omnes 10 litterarum.

P R O B L E M A I.

EX dato numero rerum combinationes omnes reperire.

Dentur exempli gr. 8. litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Prima *a* combinetur cum ſingulis ipſam ſequen-

ſequentibus, nimirum cum *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, & provenient inde combinationes binarum diverſæ 7, nempe *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *ag*, *ah*. Secunda *b* combinetur cum ſingulis ipſam ſequentibus, nempe cum *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, & ſic deinceps ſingulæ datarum cum omnibus ipſas ſequentibus combinentur: provenient diverſi binarii omnes, qui ex dato litterarum numero haberi poſſunt.

Quod ſi ſingulos binarios diverſos jam repertos combines cum ſingulis litteris ipſos conſequentibus, prodibunt omnes diverſi terniones, qui haberi poſſunt ex dato numero litterarum. Ex. gr. binariorum inventorum primus *ab* combinetur cum ſingulis litteris ipſum ſequentibus, quæ ſunt *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, provenient terniones *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *abh*. Sumatur jam alius quivis binarius *cf*; litteræ hunc ſequentes ſunt *g*, *h*; hic ergo dat terniones *cfg*, *cfh*, non plures.

Combinationes 8 litterarum

a b c d e f g h.

Binarii diverſi 28.

ab,ac,ad,ae,af,ag,ah.
bc,bd,be,bf,bg,bh.
cd,ce,cf,cg,ch.
de,df,dg,dh.
ef,eg,eh.
fg,fh.
gh.

Ter-

Terniones diverſi 56.

abc,abd,abe,abf,abg,abh.
acd,ace,acf,acg,ach.
ade,adf,adg,adh.
aef,aeg,aeh.
afg,afh.
agh.
bcd,bce,bcf,bcg,bch.
bde,bdf,bdg,bdh.
bef,beg,beh.
bfg,bfh.
bgh.
cde,cdf,cdg,cdh.
cef,ceg,ceh.
cfg,cfh.
cgh.
def,deg,deh.
dfg,dfh.
dgh.
efg,efh.
egh.
fgh.

Quaterniones diverſi 70.

abcd,abce,abcf,abcg,abch.
abde.abdf.abdg,abdh.
abef,abeg,abeh.
abfg,abfh.
abgh.
acde,acdf,acdg,acdh.
acef,aceg,aceh.
acfg,acfh.

acgh.

acgh.
adef, adeg, adeh.
adfg, adfh.
adgh.
aefg, aefh.
aegh.
afgh.
bcde, bcdf, bcdg, bcdh.
bcef, bceg, bceh.
bcfg, bcfh.
bcgh.
bdef, bdeg, bdeh.
bdfg, bdfh.
bdgh.
befg, befh.
begh.
bfgh.
cdef, cdeg, cdeh.
cdfg, cdfh.
cdgh.
cefg, cefh.
cegh.
cfgh.
defg, defh.
degh.
dfgh.
efgh.

Rurſum, ſi omnes jam inventi terniones combinentur cum litteris ipſos ſequentibus, prodibunt omnes quaterniones diverſi poſſibiles. Et ſic deinceps.

Ratio hujus conſtructionis per ſe ſatis eſt mani-

manifeſta. Ad pleniorem porro intelligentiam totius methodi

Obſerva I. Si ex datò rerum numero capiantur duo numeri, qui ſimul componunt ipſum datum numerum, eorum combinationes ſunt æquè multæ. Dentur 8 litteræ, & ex numero 8 ſume 1, & 7, quæ ſimul efficiunt 8, poterunt ex 8 ſumi octo diverſæ unitates, ac proinde etiam 8 diverſi litterarum ſeptenarii.

Rurſum ex 8 cape 2, & 6, quæ juncta efficiunt 8. Methodo jam traditâ ex 8 litteris habentur combinationes binarum diverſæ 28, totidem ergo erunt etiam diverſæ combinationes ſenariæ. Sumantur ex 8 rurſum 3, & 5, quorum ſumma eſt 8. Quoniam combinationes ternariæ diverſæ reperiuntur 56, etiam totidem erunt diverſæ combinationes quinariæ. Quæ omnia ſunt manifeſta conſideranti.

Obſerva II. Quò numeri, ſecundum quos fit combinatio, utrimque magis accedunt verſus medium, eò plures exhibent combinationes. Sic ex datis litteris 8 plures habentur biniones, & ſenarii diverſi, quàm unitates, & ſeptenarii; item plures diverſi terniones, & quinarii, quàm biniones, & ſenarii.

Obſerva III. Cum numerus rerum datus eſt par, tunc illius ſemiſſis maximum dabit numerum combinationum, ut cum litterarum numerus datur 8, ſi litteræ combinentur quaternæ, habebitur maximus combinationum numerus.

Cum verò numerus rerum datur impar, tunc duo numeri contigui, quorum ſumma facit datum numerum rerum, exhibent maximum numerum combinationum. Ut ſi dentur 9 litte-

9 litteræ, numeri contigui, quorum ſumma faciat 9, ſunt 4, & 5. Quare ſi litteræ combinentur quaternæ, vel quinæ; maximus habebitur numerus combinationum.

Quoniam verò ex methodo jam traditâ ſciri nequit combinationum numerus, niſi ſingulæ exhibeantur, regulam adjungo ex Petro Herigonio, qua facilè is innoteſcat.

Reg. Datus ſit rerum numerus *a*, & alius eo minor *b*, ſecundum quem res datæ ſint combinandæ. Inſtituantur duæ

a	c	
8.7.6.	336	56
3.2.1.	6	f
b	e	

progreſſiones Arithmeticæ per ſubductionem unitatis a numeris datis *a*, *b*, tot terminorum, quot minor *b* habet unitates. Tum numerus *c*, genitus ex multiplicatione terminorum majoris progreſſionis, dividatur per numerum *e* productum ex multiplicatione terminorum progreſſionis minoris. Quotiens erit quæſita combinationum multitudo, quæ haberi poteſt, ſi res datæ ſecundum numerum *b* combinentur.

Quod ſi lubeat ſcire in quot combinationibus res ſingulæ reperiantur, multitudinem combinationum duc in numerum, ſecundùm quem res ſunt combinatæ; productum divide per datum numerum rerum: quotiens oſtendet, in quot combinationibus unaquæque res reperiatur.

Appoſui exemplum horum omnium in litteris 8: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Ex his diverſi habentur binarii 28, terniones 56, quaterniones 70, quinarii 56, ſenarii 28, ſeptenarii 8,

qui

[illegible]

Caput ſequens.

PROBLEMA IX.

Dato numero, numerum permutationum poſsibilium invenire.

[illegible] a . b . c . d . e, f . g . h . i . k . [illegible]

[illegible]

Nu. Re.	Permut.
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40 . 320
9	362 . 880
10	3628 . 800
24	620448401733239439360000

[illegible]

ſint, ſeu eædem; ut ſi detur hæc vox *Ignatius* 8 litteris conſtans, in qua duæ litteræ occurrunt eædem, nempe *i*, permutationum numerus invenietur hac regulâ, ex *a* Kirchero noſtro deprompta. *a* Tom. 2. muſurg. pag. 5.

Numerus permutationum totius dividatur per numerum permutationum, quas ſubire poſſunt res ſimiles, quotiens dabit quæſitum.

Litteræ 8 hujus vocis *Ignatius*, ſi omnes eſſent diverſæ, admitterent permutationes 40, 320. Litteræ eædem ſunt 2. Porro 2 permutationes admittunt duas. Igitur 40, 320 dividantur per 2. Quotiens 20, 160. dabit omnes ordines diverſos poſſibiles 8 litterarum, quibus conſtat vox *Ignatius*.

Corollaria.

I. HOmines 10 poſſunt menſæ accumbere plus, quàm termillioneſies, ſic ut numquam ſit idem ordo accumbentium. Rerum quippe 10 ordines diverſi ſunt 3 (628, 800.

II. Mille milliones Scriptorum, mille annorum millionibus, non ſcribent omnes 24 litterarum alphabeti permutationes, licèt ſinguli quotidie abſolverent 40 paginas, quarum unaquæque contineret 40 diverſos ordines litterarum 24.

Id breviter ſic oſtendo. Quoniam unus Scriptor uno die ſcribit 40 paginas, quarum ſingulæ contineant 40 ordines diverſos litterarum 24; ductis igitur 40 in 40, fiunt diverſi ordines 1600, quos uno die ſcribet Scriptor unus. Ergo ſi demus anno dies 366, hoc eſt plures,

quàm ei debeantur, ſcribet Scriptor unus anno uno 24 litterarum ordines, ſive purmutationes 585, 600: fit enim hic numerus ex 1600 ductis in 366.

Annis igitur 1, 000 (000000), hoc eſt mille millionibus annorum ſcribet unus permutatio-

A 585 (600000 (000000
B, 585, 600 (000000 (000000 (000000
C. 620, 448 (401, 733 (239, 439 (360, 000

nes diverſas A: hic enim numerus oritur ex 585, 600 ductis in 1, 000 (000000. Quare ſi mille annorum millionibus Scriptor unus ſcribat permutationes, ſeu ordines diverſos A; Scriptorum mille milliones eodem tempore, videlicet mille annorum millionibus, ſcribent litterarum 24 tot permutationes diverſas, quot fiunt ex 1, 000 (000000, hoc eſt mille millionibus, ductis in A. Numerus verò permutationum, ex hac multiplicatione genitus, eſt B, qui adhuc minor eſt numero C, deſignante permutationes omnes 24 litterarum.

III. Ex problemate eodem reperientur omnia Anagrammata poſſibilia nominis dati. Quod ſi aliquæ litteræ in nomine dato ſint eædem, adhibenda inſuper erit regula ſuperiùs tradita.

IV. Ut habeantur omnia vocabula, quæ ex litteris alphabeti 24 concinnari poſſunt, oportebit per Probl. I. omnes 24 litterarum combinationes binarias, ternarias, quaternarias, quinarias, ſenarias, &c. exhibere; & primùm quidem combinationes omnes ſtrictè acceptas, de

de quibus agitur in I. Probl., quæ non ſolùm omnes inter ſe diverſæ ſunt, ſed etiam nullam litteram bis continent: deinde verò etiam eas omnes, in quibus litteræ una, vel plures ſæpius recurrunt, quarum inventio ex prioribus ſatis eſt manifeſta. Tum verò combinationum ſingularum litteræ per Probl. II. diverſimodè inſuper erunt permutandæ toties, quoties poſſunt. Ex omnibus illis tum combinationibus, tum permutationibus numerus vocabulorum ingens quidem ille, & prope immenſus, ſed tamen certus, atque determinatus procreabitur.

FINIS.

APPENDIX,

Qua Theoria, & Praxis Arithmeticæ etiam in Figuris demonſtratur.

HIc epilogus eſt minùs in Tyronum eruditionem, quàm in Eruditorum gratiam, ſeu potiùs in hujus Arithmeticæ complementum, ac ornamentum. Cum enim quatuor illius partes præcipuæ, ſcilicet additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio ſuper libris ipſis præpoſitis, illorumque Prolegomenis totaliter fundentur, & a libris poſtpoſitis admodum perficiantur: nunc reſtat, ut pars ejus quælibet figurâ aliquâ geometricâ, iiſdem principiis demonſtrandâ, in poſtremum adornetur.

ADDITIO.

Tabula 6. Fig. 1. *DAta ſint triangula ſimul addenda, ut ſumma ſit triangulum datis æquale.*

Si triangula data ſint inæqualis altitudinis, ut A B C, C D E, E F G; ad æqualem altitudinem ſunt reducenda, ut patet ex figuræ conſtructione, quæ pendet ex primis Geometriæ elementis Tyronibus vix ignotis. Hanc tamen praxim, ad faciliorem hujus axiomatis intelligentiam, hìc apponemus.

Sint igitur triangula A B C, E F G, ad altitudinem C D E reducenda. Ad altitudinem

CD du-

CD ducatur parallela HL contra baſim A G *a*: poſtea linea CB producatur in H *b*, unde ducatur linea HA: & ducta ipſi parallela I B determinabit punctum I, ex quo ducenda eſt linea IH, quæ triangulum IHC perficit, illudque triangulo ABC æquale *c* conſtituit ad altitudinem requiſitam.

a p. 31. l. 1. *b* poſtul. 2. l. 1. *c* p. 37. l. 1.

Ad eamdem altitudinem reducetur triangulum E F G, ſi ductâ lineâ L G, & ipſi parallelâ F *K*, ducatur ex puncto *K* linea *K*L, quæ triangulum *K* L E perficit, illudque triangulo E F G æquale conſtituit ad altitudinem requiſitam. Demonſtratio ut ſupra.

Sed ſicut ducendo lineam EH, triangulum I H E eſt æquale triangulo A B C + C D E *d*; ſic etiam ductâ lineâ *K*H, triangulum I H *K* eſt æquale A B C + C D E + E F G. *e*

d p. 37. l. 1. Axiom. 2. l. 1. *e* ibidem.

Quando autem triangula ſunt altitudinis æqualis, ut I H C, C D E, E L *K*: baſes eorum I C, C E, E *K* componantur in rectam lineam, cui parallela H L ducatur in ſummitate angulorum; tunc ſi ex extremitatibus baſis generalis I *K* ducantur duæ lineæ ad quodlibet punctum lineæ parallelæ HL, etiam ad angulum datum, ut in 2da fig. CP, conſtituent triangulum, I H *K n*, ſive I M *K o* æquale triangulis datis ſimul additis.

Tabula 6. Fig. 1. & 2. *n*. Fig. 1. op. 1. lib. 6 Fig. 2.

Demonſtratio.

HÆc praxis a Tyronibus ſi attentè, conſideretur, ſufficienter illis patebit ex principiis *a* in hoc opere contentis: ſumma enim trianguli I H C + C D E + E L *K* ſemel continetur in triangulo I H *K*, aut I M *K*.

a Axiom. 2 3 4 5. l. 7. Definit. 13. 14. l. 7.

Ut tamen peritioribus, qui rigorem geometricæ demonſtrationis poſtulant, fiat ſatis; ſequentem *b* hic adjungimus, de qua conſuli poteſt Geometria ſupra *c* citata.

b De ſaiguil.
c pag. 2.

Tabula 6. Fig. 1.

{ E K H eſt æquale E L K, per Propoſit. XXXVII. Lib. I.
E H C eſt æquale C D E, per eamdem.

Fig. 1. Ergo C H K eſt æquale E L K + C D E, per ax. II. Lib. I. Sed I H C eſt etiam ſibi æquale I H C, per idem. Ergo I H K eſt æquale I H C + E L K + C D E. Cum autem per conſtructionem, ſive per tranſmutationem figurarum, quam primò ſuppoſuimus etiam Tyronibus vix ignotam, I H C ſit æquale A B C, & E L K etiam æquale E F G: evidens eſt, quod ſi triangulum I H K *a*, aut I M K *b* ſit æquale I H C + E L K + C D E triangulis æqualis altitudinis, ut demonſtratum eſt; erit etiam æquale A B C + C D E + E F G triangulis inæqualis altitudinis. *Q. E. D.*

a Fig. 1.
b Fig. 2.
Fig. 1.

PROBLEMA ALTERUM.

Triangulum ſit triangulo addendum, ut ſumma ſit Parallelogrammum, vel quadratum.

Tabula 7. Fig. 1. Si triangula ſint æquè alta, ut E D A, & A I G, ad dimidiam partem baſis fiat Parallelogrammum B C R G ad eamdem altitudinem, & erit ipſis æquale. Si verò triangula non ſunt æquè alta, ut D E F, & F G H, revocentur ad eam-

Fig. 2.

eamdem altitudinem, ut ſupra, & in baſi communi fiat Parallelogrammum ad dimidiam altitudinem. Si autem etiam in quadratum mutare deſideres hæc duo triangula; confectum ex iis Parallelogrammum revocetur ad quadratum. Sit nempe Parallelogrammum H I K O æquale triangulis D E F, F G H. Producatur latus ejus HO in M, ut OK ſit æquale O M; deſcribatur ſuper H M ſemicirculus, & a puncto O erigatur perpendicularis O Q, cujus quadratum O Q P N erit æquale Parallelogrammo, & per conſequens triangulis datis. Fig. 2.

Eodem modo fieri poteſt additio omnium ſpecierum figurarum, & illarum transformatio in quaslibet figuras additis diverſas, & ad magnitudinem requiſitam, aut convenientem. Cum autem hanc materiam ſeparatim, Deo juvante, ſimus brevì tractaturi; aliquod illius ſpecimen ad rem preſentem poteſt ſufficere, ſive in additione, ſive in aliis Arithmeticæ partibus.

SUBTRACTIO.

D*Atum ſit triangulum a triangulo ſubtrahendum, ut maneat triangulum.*

Triangulum D E I ſubtrahendum ſit ex BAD. Si ſint æquè alta *a*, transferatur baſis D I in D O, & ducatur A O, tunc OAD erit æquale D E I *a*; & manebit pro exceſſu triangulum B A O. *b*

Tabula 8. *a* Fig. 1.
a p. 1. l. vi.
b Defin. 4. l. vii. & p. 4. hujus.

Si verò triangula non ſint æquè alta, ut B A C, C D G; revocetur C D G ad CFH, & factâ ſubtractione, ut ſupra, remanebit Fig. 2.

pro exceſſu triangulum B A S. Demonſtratio patet ex conſtr., & ex præc. Problem.

MULTIPLICATIO.

DEtur quadratum per quemlibet numerum 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. multiplicandum, ita ut duplum, triplum, quadruplum, & ſic in infinitum multiplum conſtituatur.

Tabula 9. Sit quadratum A B C D duplum conſtituendum. Sumatur diagonalis A C, & ducatur linea illi ſimilis ex A in E, & in G; exinde

a p. 31. l. 1. per parallelas E F, F G *a* quadratum A E F G erit duplum quadrati dati A B C D.

Quod ſi idem quadratum A B C D ſit triplum conſtituendum; ſumatur linea B G, & ducatur ex A in *K*, & in I; exinde per parallelas *K* H, H I quadratum A *K* H I triplum erit quadrati dati A B C D, quod eodem modo quadruplum, 5um, 6um, 7um &c. conſtituetur.

Si per 9 ſit multiplicandum; ſumatur linea 4, & 5 ſive V N, & erit latus Quadrati requiſiti A R M T. Si per 13. linea 4, & 9.

Si per 19; linea 6, 13, ſeu Q S conſtituet latera Quadrati A Z X Y.

Si per 38; Diagonalis Y Z erit latus Quadrati A B C D per 38 multiplicati; & ſic in infinitum, quod admiratione dignum Tyronibus apparebit.

Multiplicatio Quadrati fieri poteſt alio modo, cujus demonſtratio *a* eadem eſt, licèt conſtructio *b* diverſa.

a Deſaiguil. p. 47. l. 1. def. 15. l. 7. ax. 1. 2. 3. 7. l. 7.
b Tabula 10.

DI-

DIVISIO.

DEtur circulus *A D C Z in* 32 *partes dividendus*. Tab. 11.

Ducatur linea D C ad quartam partem circuli, & dividatur in duas partes æquales per perpendicularem B E, quæ erit ſemidiameter circuli E O *K* F R.

Poſtea ducatur linea R O, cujus media pars, ſeu perpendicularis QB erit ſemidiameter circuli QP Y S. Sicque ex lineis IN, HM, GL fiant circuli: tunc in circulo dividendo erunt quinque circuli, quorum

REOKF	eſt	$\frac{1}{2}$	Circuli dati ADCZ.
QPYS		$\frac{1}{4}$	ejuſdem
IMrrT		$\frac{1}{8}$	
HLiiV		$\frac{1}{16}$	
Gdee		$\frac{1}{32}$	circuli in tot partes dividendi.

Demonſtratio eadem eſt, ac præcedentis Problematis, & eſt ſimili admiratione digniſſima,

ſima, propter mirabiles circuli ad quadratum rationes, nec non trianguli ad utrumque relationes. Illas igitur benevolo, & erudito Lectori ſpeculandas relinquimus in ultimâ figurâ hìc appoſitâ a, quæ tamquam epitome hujus Appendicis, totam iſtam Arithmeticam, tam Theoricam, quàm Practicam fœliciter coronabit, ſicque ejus demonſtratio b, in modum Corollarii, huic opuſculo finem pariter imponet.

a Tabula ultima.

b Deſaiguiliers.

Demonſtratio.

UT 14 eſt ad 11, ſic Quadratum AC eſt ad Circulum A B C a: & ut 14 eſt ad 11, ſic etiam AC eſt ad DC b. Inde ſequitur AC eſſe ad DC, ut Quad. AC ad Circul. A B C c: Et ut A C eſt ad D C; ſic etiam Quad. AC eſſe ad Quad. B C d.

Tabula ultima. a Archimed. 2. 1. b ex cõſt. c Euclid. 11. 5. d 19. 20. 6.

Ergo Quad. AC eſt ad Quad. BC, ut Quad. AC eſt ad Circul. A B C e. Subt. Quad. AC æqual. Quad. A C.

Sicque Quad. BC æquale eſt Circul. A B C f. Sed Quad B C eſt æquale Quad. E F g. Ergo Quad. E F eſt æquale Circul. A B C h. Sic etiam per XXXVII, & XXXVIII Lib. I Euclid. poteſt demonſtrari Triang. MLN eſſe æquale Quad. EF, & triang. GIH eſſe æquale Triang. MLN; ſicque Quad. EF eſſe æquale Triang. MLN i. Sed Quad. EF eſt æquale Circul. A B C k. Ergo Triang. MLN æquale eſt Circ. A B C l. *Q. E. D.*

e 11. 5. f 9. 5. 3. 1. g 2. cõſt. h 1. Ax. Eucl. 1. i 1. Ax. Eucl. 1. k ut ſupra. l Ax. 1. 1.

Cum autem Quad. E F ſit etiam æquale parallelogrammo M N o. Inde ſequitur, omnes hujus appendicis figuras in hac ultimâ Tabulâ cum eâdem proportione contineri. Quod eſt majori ſpeculatione digniſſimum, ideoque ſubſecuturo opere plenius pertractandum.

n. o 43. 1.

NICOLAI
DE MARTINO
DE
PERMUTATIONIBUS,
ET
COMBINATIONIBUS
OPUSCULUM.

DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS.

DOctrinam de permutationibus, & combinationibus utiliſſimam eſſe, tum in rimandis naturæ arcanis, cùm in Civilis vitæ uſu, neminem latere arbitror, niſi quem fugiat, infinitam varietatem, quæ tam in naturæ operibus, quàm in Mortalium actionibus elucet, non aliunde, quàm ex diverſa partium permutatione, aut combinatione originem trahere. Notum quippe eſt, quàm difficile ſit, modos omnes recenſere, quibus res plures, ad effectum aliquem producendum concurrentes, ſimul permutari poſſunt, aut combinari. Quin etiam dici poteſt, nullum eſſe vitium, in quod Homines, vel maximè prudentes, frequentiùs impingunt, quàm quod vulgò dicitur imperfecta partium enumeratio. Itaque doctrina illa, quæ huic medetur defectui, docetque enumerare modos omnes, quibus res plures ſimul permutari poſſunt, aut combinari, merito ſuo utiliſſima cenſenda eſt. Quocirca non exiguum operæ pretium facturum me eſſe arbitror, ſi doctrinam iſtam de permutationibus, & combinationibus, leviter a Tacqueto traditam, in Tyronum gratiam paullo fuſiùs in hoc opuſculo exponam.

CAP.

C A P. I.

De Permutationibus.

DUæ, aut plures res dicuntur inter ſe permutari, quum ita quidem permiſcentur, ut eâdem rerum ſervatâ multitudine, ordo ſituſve tantummodo inter ipſas permutetur. Qua ratione dicentur quæri duarum, aut plurium rerum permutationes omnes, quum quæritur quoties res illæ permiſceri poſſint eâ ratione, ut omnibus ſemper acceptis, ſolus ordo ſituſve mutetur.

Jam duarum rerum diverſarum *a*, & *b* duæ eſſe poſſunt permutationes diverſæ. Quippe vel *a* præcedit, & ſequitur *b*, eritque permutatio una; vel viciſſim *a* ſequitur, & præcedit, eritque permutatio altera. Quumque ex tribus rebus diverſis *a*, *b*, *c* intereà ac una primum obtinet locum, reliquæ duæ bis poſſunt permutari; erunt trium illarum rerum diverſarum ter duæ, hoc eſt ſex diverſæ permutationes. Atque ita quoque ſi quatuor extiterint res diverſæ *a*, *b*, *c*, *d*, quia dum una primum tenet locum, tres reliquæ ſexies ordinem variabunt, fient illarum rerum permutationes omnes diverſæ quater ſex hoc eſt viginti quatuor. Proindeque generaliter numerus permutationum diverſarum, quas plures res diverſæ ſubire poſſunt, toties continebit numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot ſunt unitates in ipſo rerum numero.

Hinc datis quotcumque rebus diverſis, facile

le erit numerum omnium permutationum diverſarum invenire. Numerus namque permutationum, quas plures res diverſæ ſubire poſſunt, toties continet numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot ſunt unitates in ipſo rerum numero. Itaque ſi datus rerum numerus multiplicetur per numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, habebitur permutationum numerus quæſitus. Jam verò duæ res diverſæ nonniſi dupliciter poſſunt permutari. Itaque ad habendum numerum permutationum, quas ſuſcipere poſſunt tres res diverſæ, multiplicari debet 2 per 3. Atque ita quoque multiplicandi erunt inter ſe mutuò numeri 2, 3, 4, ut habeatur numerus permutationum, quas ſuſcipiunt quatuor res diverſæ. Quocirca generaliter ſi omnes numeri poſt unitatem naturali ordine ſe conſequentes ad datum uſque rerum numerum incluſivè multiplicentur per ſe mutuò, productum numerum permutationum exhibebit.

Veruntamen ſi in dato rerum numero res aliquæ ſint ſimiles, ſive eædem, hoc eſt una eademque res bis, aut ſæpius recurrat; tunc numerus permutationum multo minor evadet. Sed ex poſitis principiis facile quoque erit illum invenire. Nam quum plures res ſunt ſimiles, eæ inter ſe nonniſi ſemel poſſunt permutari. Unde omnes illæ permutationes, quæ orirentur, ſi res illæ eſſent diverſæ, jam propter earum ſimilitudinem evaneſcent. Itaque quum in dato rerum numero plures res ſunt ſimiles, ſive eædem, habebitur numerus permutationum omnium diverſarum, ſi numerus permutationum, quas ſuſcipere poteſt datus rerum nume-

numerus, ſi omnes eſſent diverſæ, dividatur per numerum permutationum, quas ſubire poſſunt res ſimiles, ſi utique velut diſſimiles conſiderentur. Ita ſi datus rerum numerus ſit 5, & in eo res eadem ter recurrat, erit 20 numerus permutationum diverſarum; quia ſi dividatur 120 numerus omnium permutationum per 6 numerum permutationum, quas ſuſcipiunt tres res tantummodo; fiet quotiens 20.

Quo ſi non una, ſed duæ, aut plures res in in dato rerum numero ſæpius recurrant, tunc habebitur numerus omnium permutationum diverſarum, ſi numerus permutationum, quas ſuſcipere poteſt datus rerum numerus, ſi omnes eſſent diverſæ, dividatur per productum ex numeris permutationum, quas ſeorſim recipere poſſunt ſingulæ res ſimiles, quæ ſæpius recurrunt, ſecundùm propriam cujuſcumque multitudinem. Qua ratione ſi ſeptem ſint rès permutandæ, inter quas una recurrat bis, altera ter; numerus permutationum omnium diverſarum erit 420.

Nam ſeptem res permutari poſſunt inter ſe 5040 modis diverſis: proindeque quia duæ bis, & tres ſexies inter ſe poſſunt permutari, diviſo 5040 per 12 productum ex 6 in 2, fit quotiens 420.

CAP.

CAP. II.

De Combinationibus ſecundùm omnes exponentes.

Combinationum nomine veniunt rerum conjunctiones, in quibus nullâ ordinis ſituſve rerum ſervatâ ratione, tantùm numerus conſideratur, quo res datæ ſimul ſunt conjungendæ. Qua ratione dicentur quæri omnes combinationes diverſæ plurium rerum datarum, quum quæritur quoties ex dato illo rerum numero binæ, ternæ, aut quaternæ accipi poſſunt ſic, ut ipſarum unaquæque numquam ſumatur ſæpius, quàm ſemel.

Jam numerus, ſecundùm quem res datæ conjunguntur, dicitur exponens combinationis. Hoc pacto, ſi res binæ ſumantur exponens erit 2; ſi ternæ, 3; ſi quaternæ, 4; atque ita deinceps. Sed res, ſecundum hos exponentes junctæ, dicuntur binarii, ternarii, aut quaternarii; vel etiam biniones, terniones, aut quaterniones: & conſequenter dicendæ ſunt uniones, quando res ſumuntur ſingulæ: & nulliones, quum nulla planè ſumitur.

Sed priuſquam de inveniendis combinationibus ſecundùm datum quemvis exponentem agamus, tradenda nobis eſt methodus, qua inveniri poſſint combinationes ſecundùm omnes exponentes conjunctim. Id itaque commodè fieri poteſt in hunc modum. Sunto combinandæ modis omnibus litteræ a, b, c, d, &c. Fiant tot ſeries, quot litteræ; ſed ita tamen,

ut in primâ ſerie reperiatur ſola littera *a*; in ſecundâ *b*, tum ſola, tum conjuncta, cum ipſa *a*; in tertiâ *c*, primò ſeorſim, deinde verò conjuncta cum omnibus terminis præcedentibus; in quartâ *d*, ſimiliter primò ſola, deinde verò addita terminis omnibus præcedentium ſerierum; atque ita deinceps.

a
b. ab.
c. ac. bc. abc.
d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.

Hac ſiquidem ratione manifeſtum eſt, datas litteras omnifariam, ac ſecundùm omnes exponentes inter ſe mutuò combinari. Et quoniam littera, quæ cujuſque ſeriei agmen ducit, primò ponitur ſola, deinde unà ſecum aſſumit terminos omnes præcedentium ſerierum; manifeſtum eſt etiam, in unaquaque ſerie unum ampliùs terminum reperiri, quàm in omnibus aliis ſeriebus antecedentibus ſimul: proindeque termini dictarum ſerierum progreſſionem geometricam duplam ab unitate conſtituent; quandoquidem per oſtenſa a Tacqueto in Theoremate XV. progreſſionum geometricarum, progreſſionis geometricæ duplæ ab unitate eam quoque naturam eſſe conſtat, ut ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat.

Atque hinc facile modò erit, omnes terminos illarum ſerierum in unam ſummam colligere, & conſequenter invenire combinationes rerum datarum ſecundum omnes exponentes conjunctim. Quum enim termini illi conſti-

tuant

mant ab unitate progreſſionem geometricam duplam, & quot ſunt unitates in dato rerum numero, tot ſint ſeries eorumdem terminorum, ſatis erit in progreſſione geometricâ duplâ, quæ initium habeat ab unitate, in unum colligere tot terminos, quot ſunt unitates in numero rerum dato. Sed totidem termini, progreſſionis geometricæ duplæ ab unitate colligentur in unum, ſi capiatur terminus ſubſequens ejuſdem progreſſionis, idemque unitate mulctetur: ob eamdem illam proprietatem modo memoratam, quod in progreſſione geometricâ duplâ ab unitate, ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat.

Et quoniam in progreſſione geometricâ duplâ ab unitate unuſquiſque terminus invenitur, ſi numerus binarius toties per ſe ipſum multiplicetur, quot eum in progreſſione termini præcedunt; habebitur ſubſequens ille terminus, multiplicando binarium toties per ſe ipſum, quot ſunt termini præcedentes, hoc eſt quot ſunt unitates in dato rerum numero. Proindeque regula pro inveniendis combinationibus omnibus ſecundùm omnes exponentes conjunctim talis erit: multiplicetur binarius toties per ſe ipſum, quot unitates continet datus rerum numerus; auferatur deinde unitas a producto, eritque reſiduum combinationum numerus quæſitus. Ita ſi numerum rerum datarum vocemus n, erit numerus omnium combinationum ſecundùm omnes exponentes conjunctim $2^n - 1$, intelligendo pro 2^n eam binarii poteſtatem, quam deſignat numerus n.

CAP. III.

De Combinationibus ſecundùm ſingulos exponentes.

TRaditâ methodo de inveniendis combinationibus ſecundùm omnes exponentes conjunctim, ſequitur, ut videamus qua ratione inveniendæ ſint combinationes ſecundùm ſingulos exponentes. Et quidem ex ipſa illa methodo qua ſuperiori capite inventæ ſunt combinationes ſecundùm omnes exponentes conjunctim, manifeſtum eſt, litteram, quæ cujuslibet ſeriei caput eſt, adjunctam unionibus ſerierum præcedentium efficere ſeriei ſuæ biniones, adjunctam binionibus efficere terniones, ternionibus, quaterniones, atque ita deinceps: proindeque in unaquaque ſerie numerus combinationum ſecundùm datum quemvis exponentem æqualis erit numero combinationum ſecundùm exponentem unitate unâ minorem, quæ in præcedentibus ſeriebus inveniuntur.

Ex quo facile modò erit Tabulam conficere, quæ ad oculum nobis oſtendat combinationes ſecundùm ſingulos exponentes, quæ in unaquaque ſerie reperiuntur. Nam uniones in ſingulis ſeriebus reperiuntur ſinguli. Itaque in unaquaque ſerie loco unionum unitas ipſa ſcribi debet. Et quoniam in prima ſerie, præter unionem unam, nullæ aliæ occurrunt combinationes, proinde in eâ loca alia cifris ſunt replenda. Sed collectis ordine unionibus omnibus ſerierum præcedentium, reperietur in ſecun-

cunda ſerie unum eſſe binionem, duos in tertia, tres in quarta, atque ita deinceps. Paritérque collectis binionibus, invenietur nullum eſſe ternionem in ſecunda ſerie, ſed unum in tertia, tres in quarta, ſex in quinta, decem in ſexta, &c. Atque ita quoque collectis ternionibus, cognoſcetur nullum eſſe quaternionem tam in ſecunda, quàm in tertia ſerie, ſed unum in quarta, quatuor in quinta, decem in ſexta, viginti in ſeptima &c. Eodemque artificio omnes aliæ combinationes cujuſcumque ſeriei poterunt ſucceſſivè inveniri.

TABULA

Combinationum ſecundùm ſingulos exponentes.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Hac

Hac tabulâ conſtructâ, conſideremus modò tres ejus proprietates. Prima proprietas eſt illa ipſa, per quam tabulæ constructionem obtinuimus, & cujus ope nullo negotio eadem tabula in infinitum poteſt continuari: nimirum, quod quilibet terminus in unaquaque columna verticali æquatur ſummæ omnium ſuperiorum præcedentis columnæ verticalis. Ex quo fit, ut ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quacumque columna verticali, ſatis ſit in unum colligere omnes terminos ſuperiores, qui ſunt in præcedenti columna verticali.

Secunda proprietas eſt, quod columnarum verticalium prima nullam habeat cifram in principio, ſed unam ſecunda, duas tertia, tres quarta, atque ita deinceps. Ex quo fit, ut ſi in iis columnis ſumantur termini æquè multi, quorum multitudinem deſignet littera a; multitudo terminorum ſignificativorum, excluſis cifris initialibus, ſit a in prima columna $a-1$ in ſecunda, $a-2$ in tertia, $a-3$ in quarta, atque ita de aliis.

Tertia proprietas eſt, quod in unaquaque columna verticali ſi aliquis terminus ſignificativus multiplicetur per numerum terminorum ſignificativorum, qui eum præcedunt, & productum dividatur per numerum illius columnæ; hoc eſt per 1 in prima columna, per 2 in ſecunda, per 3 in tertia, atque ita deinceps, quotiens ſit ſumma ex præcedentibus terminis ſignificativis. Unde facile modò erit, terminos quotcumque cujuſcumque columnæ verticalis in unam ſummam colligere.

Sumantur enim in unaquaque columna verticali ab initio termini æquè multi, & deſignet eorum multitudinem littera a. Itaque ob ſecundam proprietatem multitudo terminorum ſignificativorum erit a in prima columna, $a-1$ in ſecunda, $a-2$ in tertia, $a-3$ in quarta, atque ita deinceps. Et quoniam in prima columna quiſque terminus eſt unitas, deſignabit in eâ eadem littera a, vel quod idem eſt $\frac{a}{1}$ non modò multitudinem, verùm etiam ſummam terminorum ſignificativorum.

Hinc porro, quia per primam proprietatem $\frac{a}{1}$ eſt terminus, qui in ſecunda columna proximè ſequitur, proinde ſi $\frac{a}{1}$ multiplicetur per $a-1$, & productum dividatur per 2, erit per tertiam proprietatem quotiens $\frac{a.a-1}{1.2}$ ſumma terminorum in ſecunda columna. Quumque ſumma iſta ſit terminus proximè inſequens in tertia columna, ſi eadem ſumma multiplicetur per $a-2$, & productum dividatur per 3, erit quotiens $\frac{a.a-1.a-2}{1.2.3}$ ſumma terminorum in tertia columna: Atque ita quoque eadem ſumma $\frac{a.a-1.a-2.a-3}{1.2.3.4}$ terminorum erit in

$a \,.\, a-1 \,.\, a-2 \,.\, a-3 \,.\, a-4$
quarta ——————————— columna, in
$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$
quinta columna, & ſic in infinitum: notando, puncta quantitatibus interjecta continuam earum quantitatum multiplicationem deſignare.

Patet autem ſummam iſtam deſignari per duplicem progreſſionem arithmeticam, unam a multitudine aſſumptâ terminorum per unitatis decrementum deſcendentem, alteram aſcendentem ab unitate per unitatis incrementum, & utramque tot terminorum, quot unitates continet numerus columnæ. Unde cum eadem ſumma deſignet combinationes omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot ſunt termini aſſumpti, & ſecundùm eum exponentem, quem columnæ numerus deſignat; perſpicuum eſt, ad inveniendas combinationes omnes, quæ ex pluribus rebus fieri poſſunt ſecundùm datum quemvis exponentem, hanc regulam obſervandam eſſe.

Nimirum fiant duæ progreſſiones arithmeticæ; una deſcendens per unitatis decrementum a numero rerum combinandarum, altera aſcendens ab unitate per unitatis incrementum, & utraque porro tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter ſe mutuò, tam termini prioris progreſſionis, quàm termini alterius; & diviſo producto ex primis per productum ex ſecundis, erit quotiens quæſita multitudo combinationum, quæ ſecundum datum exponentem inſtitui poſſunt. Quæ quidem eſt ipſiſſima regula, quam ex Petro Herigono attulit Tacquetus.

CAP.

CAP. IV.

De Combinationibus, in quibus eadem res ſæpius recurrere poteſt.

IN combinationibus rerum inveniendis, tam ſecundùm omnes conjuctim, quàm ſecundùm ſingulos exponentes, illud ſuppoſuimus, nullam rem ſecum ipſam jungi, neque adeò plus ſemel in eadem combinatione accipi poſſe. Quod ſi autem hæc inſuper conditio adjici velit, ut unaquæque res etiam ſecum ipſa jungi, adeoque in eadem combinatione ſæpius redire queat; tum numerus combinationum multo major evadet. Sed eidem methodo inſiſtendo, facile erit has quoque combinationes invenire.

Sunto itàque combinandæ in hunc modum litteræ *a*, *b*, *c*, &c. Fiant tot ſeries, quot litteræ; & ſingularum capita occupent ſingulæ litteræ, ceu totidem uniones. Sed pro binionibus cujuſque ſeriei inveniendis, littera, quæ ejus agmen ducit, non tantùm cum præcedentibus unionibus, ſed etiam cum ſe ipſa combinetur. Et ſimiliter pro formandis ternionibus, non modò præcedentium ſerierum, ſed etiam ſuæmet ſeriei biniones aſſumat. Idemque fiat etiam in combinationibus ſecundùm omnes alios exponentes. Sic enim nullam combinationem, quæ circa datas res inſtitui queunt, præteriri poſſe liquidò conſtat.

Hinc

a. aa. aaa.
b. ab. bb. aab. abb. bbb
c. ac. bc. cc. aac. abc. bbc. acc. bcc. ccc.

Hinc autem clarè liquet, in unaquaque ſerie numerum combinationum ſecundùm datum quemvis exponentem æqualem eſſe numero combinationum ſecundùm exponentem unitate unâ minorem, quæ tum in ipſa, cum in præcedentibus ſeriebus inveniuntur: proindeque eadem tabula ſuperiùs conſtructa deſignabit combinationes ſecundùm ſingulos exponentes, quæ occurrunt in unaquaque ſerie, ſi ex columnis verticalibus deletis cifris initialibus, attollantur eæ ſurſum, donec omnia cujuſque loca repleantur, & unaquæque incipiat ab unitate, quemadmodum factum hìc vides.

TA-

TABULA

Combinationum, in quibus eadem res ſæpius recurrere poteſt.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	4	10	20	35	56	84	120
5	1	5	15	35	70	126	210	330
6	1	6	21	56	126	252	462	792
7	1	7	28	84	210	462	924	1716
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440

Jam

Jam in numeris hujus tabulæ duas licet cernere proprietates. Prima eſt, quod ſi alicujus columnæ verticalis termini quotcumque in unum addantur, ſumma ſit terminus, qui ultimo correſpondet in ſequenti columna verticali. Altera, quod in unaquaque columna verticali ſi terminus aliquis multiplicetur per numerum terminorum præcedentium, tot unitatibus adauctum, quot columnæ locus oſtendit, & productum dividatur per numerum ejuſdem columnæ, quotiens ſit ſumma ipſius cum terminis præcedentibus.

His poſitis proprietatibus, haud difficile modo erit, terminos quotcumque cujuslibet columnæ verticalis in unam ſummam colligere. Sumantur etenim ab initio termini æque multi in unaquaque columna, & referat eorum multitudinem littera a. Itaque, quia in prima columna quiſque terminus eſt unitas, deſignabit eadem littera a, ſive $\frac{a}{1}$ ſummam ipſorum, quæ etiam per primam proprietatem erit ultimus terminus ex aſſumptis in ſecunda columna. Unde ſi eadem multiplicetur per $a+1$, & productum dividatur per 2; erit per ſecundam proprietatem quotiens $\frac{a\,.\,a+1}{1\,.\,2}$ ſumma terminorum in ſecunda columna.

Et ſimiliter, quia hæc eadem ſumma eſt ultimus terminus ex aſſumptis in tertia columna, ſi ea multiplicetur per $a+2$, & productum dividitur

datur per 3, erit quotiens, $\frac{a \cdot a+1 \cdot a+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ſumma terminorum in tertia columna. Atque eidem methodo inſiſtendo, ſumma terminorum erit $\frac{a \cdot a+1 \cdot a+2 \cdot a+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ in quarta columna; $\frac{a \cdot a+1 \cdot a+2 \cdot a+3 \cdot a+4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ in quinta columna; atque ita deinceps.

Patet autem, ſummam illam deſignari per duplicem progreſſionem arithmeticam, utramque aſcendentem per unitatis incrementum, unam à multitudine aſſumpta terminorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum quot unitates continet numerus columnæ. Quocirca, quia eadem ſumma deſignat combinationes omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot ſunt termini aſſumpti, ſecundùm eum exponentem, quem columnæ numerus deſignat, & eâ lege, ut unaquæque res non ſolum cum aliis, ſed etiam cum ſe ipſa jungi poſſit; perſpicuum eſt, ad inveniendas omnes hujuſmodi combinationes, quæ fieri poſſunt ex pluribus rebus ſecundum datum quemvis exponentem, hanc regulam obſervandam eſſe.

Nimirum, fiant duæ progreſſiones arithmeticæ, ambæ aſcendentes per unitatis incrementum, una quidem a numero rerum combinandarum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter ſe mutuò, tam termini prioris progreſſionis, quàm termini

mini alterius; & diviſo producto ex primis per productum ex ſecundis, erit quotiens quæſita multitudo combinationum, quæ ſecundum datum exponentem iniiri poſſunt eâ lege, ut quælibet res non ſolùm cum aliis, ſed etiam cum ſe ipſa combinata reperiatur.

CAP. V.

De Combinationibus, in quibus ordo ſituſve rerum etiam attenditur.

DIximus capite ſecundo, combinationes vocari rerum conjunctiones, in quibus nulla ordinis ſituſve rerum habitâ ratione, dumtaxat multitudo conſideratur, ſecundùm quam res datæ ſimul ſunt conjungendæ: qua ratione litteræ *a*, *b*, *c* unum conſtituunt ternarium, quocumque ordine ſcribantur. Quod ſi porro hæc alia hypotheſis aſſumi velit, ut in combinationibus etiam varietas, quæ oritur ex ordine, ſive ſitu rerum combinandarum, ſit attendenda; tunc multitudo combinationum longè quidem major evadet: unde qua ratione definiri poſſit, hoc Capite oſtendemus.

Et quidem ſi rerum combinationes ſubinde fieri debeant, ut unaquæque res numquam ſæpius, quàm ſemel, id ſingulis combinationibus recurrat; perſpicuum eſt, unamquamque combinationem ratione ordinis, ſive ſitus litterarum toties eſſe reiterandam, quot modis diverſis permutari poſſunt litteræ, quæ exiſtunt in ipſa combinatione: proindeque habebitur multitudo combinationum, quæ fieri poſſunt ex pluribus rebus ſecundùm datum quemvis exponen-

rem

tem ea lege, ut ordo ſituſve rerum etiam inducat variationem, ſi numerus combinationum, quæ ex iiſdem rebus ſecundùm eum exponentem, hac lege neglecta, inſtitui poſſunt, multiplicetur per numerum permutationum diverſarum, quas ſubire poſſunt tot res diverſæ, quot unitates continet datus exponens.

Jam ex oſtenſis in Capite tertio numerus combinationum, quæ ex pluribus rebus ſecundùm datum quemvis exponentem ſimpliciter inſtitui poſſunt, habetur, ſi factis duabus progreſſionibus arithmeticis, unâ a dato rerum numero per unitatis decrementum deſcendente, alterâ aſcendente ab unitate per unitatis incrementum, & utraque tot terminorum, quot unitates continet datus exponens, dividatur productum ex terminis primæ per productum ex terminis ſecundæ. Quocirca, quia per oſtenſa in Capite primo productum ex terminis ſecundæ deſignat numerum permutationum diverſarum, quas ſubire poſſunt tot res diverſæ, quot ſunt unitates in dato exponente; deſignabit productum ex terminis primæ numerum combinationum, quæ ex iiſdem rebus ſecundùm eumdem exponentem fieri poſſunt eâ lege ut ex ordine ſituque rerum variatio etiam oriatur.

Hinc ad inveniendas combinationes omnes, quæ inſtitui poſſunt ex pluribus rebus ſecundùm datum quemvis exponentem eâ lege, ut ordo ſituſve rerum etiam variationem inducat, talis regula nobis ſubnaſcitur: nempe fiat progreſſio arithmetica deſcendens a dato rerum numero per unitatis decrementum, & tot terminis conſtans, quot unitates continet da-

tus

tus exponens; deinde multiplicentur inter ſe mutuò termini omnes hujus progreſſionis, & productum ex hac multiplicatione ortum dabit combinationum multitudinem quæſitam. Ex quo illud inferre licet, quod ubi datus exponens numerum rerum adæquat, quia in progreſſione ad unitatem uſque deſcenditur, tantumdem ſit, ac ſi ſimplices permutationes datarum rerum quærerentur.

Quod ſi autem rerum combinationes ſubinde inſtitui debeant, ut unaquæque res etiam cum ſe ipſa conjungi poſſit; tunc numerus combinationum omnium habebitur, ſi datus rerum numerus elevetur ad eam poteſtatem, quam deſignat datus combinationis exponens, hoc eſt ad quadratum, ſi exponens datus ſit 2, ad cubum, ſi 3; ad quadrato-quadratum, ſi 4; atque ita deinceps. Qua ratione trium rerum diverſarum biniones omnes modis omnibus permutati ſunt 9; terniones 27; quaternions 81, &c. Pariterque ſi datus rerum numerus ſit 4, erunt 16 omnes biniones, 64 omnes terniones, 256 omnes quaterniones, atque ita in infinitum.

Nec difficile eſt hujus regulæ rationem intelligere. Dentur enim plures litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, &c., quarum numerus ſit *m*, combinandæ in hunc modum, ut unaquæque littera poſſit ſecum ipſa jungi, & ordo ſituſve litterarum etiam variationem inducat. Planè ſi iis præponatur littera *a*, habebuntur biniones omnes, qui incipiunt ab *a*; ſi littera *b*, biniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita de aliis. Itaque ſeries binionum, pro diverſitate litterarum, a quibus incipiunt, tot erunt, quot

F f ſunt

ſunt unitates in dato numero *m*, & unaquæque ſeries totidem quoque biniones continebit, quot in eodem numero ſunt unitates: proindeque erit *mm*, hoc eſt quadratum numeri binionum omnium numerus.

Jam iſtis binionibus ſi præponatur littera *a*, habebuntur terniones omnes, qui incipiunt ab *a*; ſi littera *b*, terniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita de aliis. Quocirca ſeries ternionum, pro diverſitate litterarum, a quibus incipiunt, tot erunt, quot ſunt unitates in dato numero *m*; ſed unaquæque ſeries tot terniones continebit, quot ſunt biniones, hoc eſt quot unitates continet quadratum dati numeri *m*: proindeque erit *m3*, hoc eſt cubus ejuſdem numeri *m* ternionum omnium numerus.

Eadem ratione ſi iſtis ternionibus præfigatur littera *a*, habebuntur quaterniones omnes, qui incipiunt ab *a*: ſi littera *b*, quaterniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita deinceps. Quocirca ſeries quaternionum, pro diverſitate litterarum a quibus incipiunt, tot erunt, quot ſunt unitates in dato litterarum numero *m*: ſed unaquæque ſeries tot quaterniones continebit, quot ſunt terniones, hoc eſt quot unitates continet cubus dati numeri *m*: proindeque erit *m4*, hoc eſt quadrato-quadratum ejuſdem numeri *m* numerus omnium quaternionum.

Atque hæc de permutationibus, combinationibuſque in Tyronum gratiam dixiſſe ſufficiat. Cæterum nolim hic ſilentio præterire, numeros columnarum verticalium utriuſque tabulæ, ſuperius conſtructæ, eſſe ex numero eorum,

quæ

qui vulgo a Recentioribus dicuntur numeri figurati: unde hac arrepta occaſione non abs re erit, in eorumdem Tyronum gratiam iſtorum quoque numerorum brevem aliquam ideam hoc loco exhibere. Et quoniam eorum conſideratio profecta eſt ex contemplatione numerorum multangulorum ab ipſis Veteribus factâ; proinde qui ſint numeri multanguli, ſive polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

CAP. VI.

De numeris multangulis, ſive polygonis.

NUmeri multanguli, ſive polygoni dicuntur, qui oriuntur ex continua collectione aliorum æquali intervallo ab unitate progredientium; & pro diverſitate hujus intervalli variæ diſtinguuntur numerorum multangulorum ſpecies: nam dicuntur trianguli, ſi intervallum ſit unitas; dicuntur quadrati, ſi intervallum ſit binarius; pentagoni, ſi idem intervallum ſit ternarius; atque ita deinceps.

Hac ratione ſi numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, ſint ipſi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt unitas, habebuntur ex eorum continuâ collectione omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; 1 + 2, ſive 3 erit triangulus ſecundus; 1 + 2 + 3, ſive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

Quod ſi numeri ab unitate æquali interval-

lo progredientes ſint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus binarius, orientur ex continua illorum collectione omnes numeri quadrati. Qua ratione: erit primus quadratus; 1 + 3, ſive 4 erit quadratus ſecundus; 1 + 3 + 5, ſive 9 quadratus tertius; atque ita continuò.

Jam ſi ſeries numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, ſit 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus ternarius, orientur ex eorum collectione continua omnes numeri pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; 1+4, ſive 5 erit pentagonus ſecundus; 1+4+7, ſive 12 erit pentagonus tertius; & ſic in infinitum.

Eâdem autem ratione ſi ſeries numerorum, qui æquali intervallo ab unitate progrediuntur, ſit 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus quaternarius, habebuntur ex continua illorum collectione numeri omnes hexagoni. Qua ratione 1 erit primus hexagonus; 1 + 5, ſive 6 erit hexagonus ſecundus; 1 + 5 + 9, ſive 15 erit haxagonus tertius, atque ita deinceps.

Et ſimiliter ſi ſeries numerorum, progredientium æquali intervallo ab unitate, ſit 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus quinarius, producentur ex eorum collectione continua numeri omnes heptagoni. Qua ratione 1 erit primus heptagonus; 1+6, ſive 7 erit heptagonus ſecundus; 1 + 6 + 11, ſive 18 hepta-

heptagonus tertius; atque ita de aliis.

Hos numeros polygonos, ſive multangulos, prout ex Veterum monumentis colligere licet, conſideravit primùm Hypſicles, qui geneſim ipſorum hac definitione complexus eſt. Si fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; ſumma omnium erit triangulus, ſi intervallum ſit unitas; quadratus, ſi binarius; pentagonus, ſi ternarius; hexagonus, ſi quaternarius, atque ita deinceps.

Et quoniam numerus angulorum in hac Hypſiclis definitione per numerum binario majorem intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur, deſignatur; proinde Diophantus eandem illam definitionem ſic generaliter concepit. Si fuerint quotcumque numeri ab unitate æquali intervallo progredientes, omnium ſumma multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus binario ſuperans intervallum, habet unitates.

Hujuſmodi porro numeri dicti ſunt multanguli, ſive polygoni, quia ipſorum unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam diſponi poſſunt: nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi; atque ita de aliis. Unde definiri quoque poſſunt numeri multanguli, ſive polygoni, quorum unitates æqualibus intervallis multangulum, ſive polygonum æquilaterum exhibent.

Ex quo patet, unumquemque numerorum, a ternario per unitatis incrementum progredientium multangulum eſſe, totque angulos, ſive latera continere, quot unitates continet ipſe numerus. Hac ratione 3 eſt triangulus,

 ſive

ſive numerus trium angulorum; 4 quadratus, ſive numerus quatuor angulorum; 5 pentagonus, ſive numerus quinque angulorum; atque ita de aliis. Et ratio eſt, quia unitates cujuslibet illorum numerorum ſubinde per æqua intervalla diſponi poſſunt, ut repræſentent figuram totidem laterum æqualium.

Et quoniam ipſa unitas virtualiter eſt omnis multangulus. Eſt enim, & triangulus, & quadratus, & pentagonus, & hexagonus, quum horum omnium multangulorum proprietates unitati ipſi conveniant: proinde quilibet numerus a ternario erit multangulus in ſua ſpecie primus ab unitate: nimirum 3 primus triangulus, 4 primus quadratus, 5 primus pentagonus, 6 primus hexagonus, atque ita in infinitum.

Jam quiſque numerus multangulus, ſive ſit primus ab unitate, ſive alius quilibet, ſi unitatibus ſuis per æqua intervalla diſpoſitis multangulum ipſum exhibeat, eum numerum habebit pro ſuo latere, qui tot continet unitates, quot ſunt termini, ex quorum collectione oritur datus numerus multangulus. Sic quia numerus triangulus 10 oritur ex collectione quatuor terminorum 1, 2, 3, 4, habebit ille pro ſuo latere numerum 4. Pariterque quia numerus quadratus 25 producitur ex collectione quinque terminorum 1, 3, 5, 7, 9, erit latus ejus numerus 5.

Atque hinc circa hujuſmodi numeros multangulos, ſive polygonos duo potiſſimùm problemata inſtitui ſolent; quorum primum eſt, dato latere, invenire multangulum datæ ſpeciei; alterum, dato multangulo, ejuſque ſpe-

cie,

cie, ejuſdem latus determinare. Sed ex iis, quæ de iſtorum numerorum geneſi dicta ſunt, perſpicuum eſt horum problematum ſolutionem ab his aliis pendere: dato numero terminorum, qui ab unitate dato intervallo progrediuntur, ſummam omnium invenire; & viciſſim datâ ſummâ plurium terminorum, ab unitate dato intervallo progredientium, numerum eorum indagare. Unde quia hæc duo Problemata jam ſolutionem acceperunt a Tacqueto libro quinto Arithmeticæ Practicæ capite ſecundo, fruſtra iis immorabimur.

C A P. VII.

De Numeris figuratis.

EX numeris multangulis, ſive polygonis profecta eſt conſideratio numerorum, qui dicuntur figurati. Quemadmodum etenim inter Veteres Hypſicles, & poſt eum Diophantus conſiderarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum æquali intervallo ab unitate progredientium, eoſque multangulos, ſive polygonos numeros appellarunt, quia unitates ipſorum, per æqua intervalla diſpoſitæ, multangulum, ſive polygonum æquilaterum repræſentant; ſic Recentiores ulteriùs progreſſi conſiderarunt numeros alios, qui generantur ex continua ipſorum multangulorum, indeque ortorum numerorum additione, vel collectione, & tam hos, quàm illos numeros figuratos appellarunt; quia ſcilicet unitatibus ipſorum per æqua intervalla diſpoſitis diverſimode poſſunt configurari.

Quocirca numeri figurati Recentioribus dicuntur non modò ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum æquali intervallo ab unitate progredientium; verùm etiam, qui ex continua inde ortorum numerorum additione generantur. Ex quo patet, numeros iſtos figuratos, non modò in varia genera diſtingui poſſe pro diverſitate intervalli, quo numeri genitores, hoc eſt ab initio aſſumpti ab unitate progrediuntur; ſed & ipſos cujuſque generis numeros in varios ordines dividi poſſe pro diverſa ratione, qua ex iiſdem illis numeris genitoribus, ſive ab initio aſſumptis generari intelliguntur.

Hac ratione, ſi intervallum, quo numeri genitores ab unitate progrediuntur, ſit unitas, numeri figurati exinde geniti dici poterunt primi generis. Sed nihilominus in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipſi illi numeri, qui ab unitate per unitatis incrementum progrediuntur, ita dici poterunt numeri figurati primi ordinis qui oriuntur ex additione numerorum genitorum; numeri figurati ſecundi ordinis, qui oriuntur ex collectione continua eorum, qui ſunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui gignuntur ex continua collectione eorum, qui ſunt ordinis ſecundi; atque ita deinceps.

Similiter ſi intervallum, quo numeri genitores, ſive ab initio aſſumpti ab unitate progrediuntur, ſit numerus binarius; numeri figurati, qui ex iis procreantur, vocari poterunt ſecundi generis. Sed in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipſi illi numeri, qui ab unitate per binarii incrementum

pro-

progrediuntur; ita quoque dici poterunt numeri figurati primi ordinis, qui oriuntur ex ipſa numerorum genitorum additione; numeri figurati ſecundi ordinis, qui oriuntur ex additione eorum, qui ſunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui ex additione eorum, qui ſunt ordinis ſecundi, generantur; atque ita in infinitum.

Ex quibus jam liquet id, quod ſuperiùs in calce Capitis quinti dictum fuit, nimirum numeros columnarum verticalium utriuſque tabulæ ſuperiùs conſtructæ eſſe ex numero eorum, qui vulgò dicuntur a Recentioribus numeri figurati. In utraque namque illarum tabularum numeri unius columnæ verticalis ab initio collecti dant numeros ſequentis columnæ verticalis. Itaque quia in ſecunda columna verticali habentur omnes numeri naturales, hoc eſt qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; perſpicuum eſt, in columnis illis contineri numeros figuratos primi generis, ita quidem, ut quemadmodum in ſecunda columna exiſtunt numeri genitores; ſic in tertia ſint numeri figurati primi ordinis, in quarta numeri figurati ordinis ſecundi, in quinta numeri figurati ordinis tertii, atque ita deinceps. Sed in prima cujuſque tabulæ columna verticali exiſtit ſeries unitatum, ex quarum continua collectione numeri naturales in ſecunda columna exiſtentes producuntur.

Jam numeri iſti figurati miras habent proprietates, quæ ad Tyrones exercendos non parum conducunt. Sed ſufficiat in iis, qui primi generis ſunt, iſtam adnotare: nimirum, quod ſi ii ita diſponantur, quemadmodum in prima

prima tabula cernere licet: adeo ut in prima columna verticali ſit ſeries unitatum, in ſecunda ſeries numerorum naturalium, tum in aliis ſint ipſi numeri figurati, qui ex continua illorum additione oriuntur; & unaquæque columna tot cifras habeat in principio, quot numerus columnæ continet unitates, unâ demptâ: quod inquam numeri columnarum tranſverſalium exhibeant ordine coëfficientes omnium poteſtatum, a radice aliqua binomia, ut $a + b$, genitarum.

Nam coefficientes ipſius radicis $a + b$ ſunt numeri 1, 1, qui reperiuntur in ſecunda columna tranſverſali; coefficientes quadrati $a^2 + 2ab + b^2$ ſunt numeri 1, 2, 1, qui reperiuntur in tertia; coefficientes cubi $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ſunt numeri 1, 3, 3, 1, qui occurrunt in quarta; coefficientes quadrato-quadrati $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ ſunt numeri 1, 4, 6, 4, 1, qui occurrunt in quinta, atque ita deinceps. Quocirca ſi prior illa tabula in infinitum continuetur, ope ejus facile quidem erit quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam poteſtatem attollere.

Tota quippe difficultas, quæ in formatione poteſtatum occurrit, conſiſtit potiſſimùm in eo, ut inveniantur coefficientes, quibus afficiendi ſunt termini poteſtatum. Nam quantùm ad ipſos terminos, habentur ii nullo negotio, ſi conſtitutis duabus progreſſionibus geometricis, quarum exponentes ſint ipſæ partes radicis binomiæ propoſitæ, & quarum una a quæſita ſui exponentis poteſtate deſcendat uſque ad unitatem, altera viciſſim ab unitate aſcendat uſque ad poteſtatem quæſitam

ſui

ſui exponentis; multiplicentur termini unius progreſſionis per correſpondentes terminos alterius.

Ut ſi velim exempli gratiâ invenire terminos cubi ex radice binomia $a+b$, conſtituo duas progreſſiones geometricas, quarum una habens pro ſuo exponente partem a deſcendat à cubo ipſius a uſque ad unitatem, altera habens pro ſuo exponente partem b aſcendat viciſſim ab unitate uſque ad cubum ipſius b: nam quum iſtarum progreſſionum una ſit $a3$, $a2$, a, 1; altera 1, b, $b2$, $b3$: multiplicatis ordine terminis unius progreſſionis per terminos alterius, fient termini cubi quæſiti $a3$, $a2b$, $ab2$, $b3$.

Similiter ſi invenienda ſint termini quadrato-cubi ex radice binomia $a+b$, formentur duæ progreſſiones geometricæ, quarum una habeat pro ſuo exponente partem a, & à quadrato cubo ipſius a deſcendat uſque ad unitatem, altera habeat pro ſuo exponente partem b, & viciſſim ab unitate aſcendat uſque ad quadrato-cubum ipſius b. Quum enim iſtarum progreſſionum una ſit $a5$, $a4$, $a3$, $a2$, a, 1; altera 1, b, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$: multiplicatis terminis unius progreſſionis ordine per terminos alterius, fient termini quadrato-cubi quæſiti $a5$, $a4b$, $a3b2$, $a2b3$, $ab4$, $b5$.

Quum, itaque termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua binomia facili negotio habeantur, liquet, totam difficultatem in formatione poteſtatum in eo ſitam eſſe, ut inveniantur coefficientes, quibus ii termini ſunt afficiendi. Unde ſemper ac iſti coefficientes reperiantur ordine in columnis tranſverſalibus

præ-

prædictæ tabulæ; perſipcuum eſt, eâ mediante facillimè quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam poteſtatem poſſe elevari. Interim ſi recordemur earum proprietatum, quas circa numeros illius tabulæ Capite tertio recenſuimus, poterimus formulam quamdam generalem nobis cudere, qua mediante vel ſolius ſubſtitutionis ope quælibet radix binomia ad quamcumque poteſtatem elevabitur. Quod quia a nobis præſtitum eſt in noſtris Algebræ Elementis, quæ propediem lucem adſpicient, ab eo hic conſulto nos abſtinemus, ne ſæpius eamdem rem proferre videamur.

FINIS

INDEX
CAPITUM,

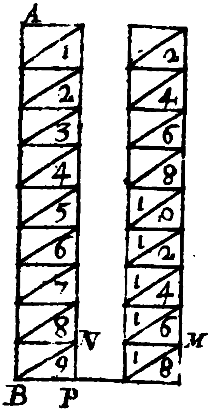
Quæ in hoc Opuſculo continentur.

Cap. 1. *De Permutationibus.*
Cap. 2. *De combinationibus ſecundùm omnes exponentes.*
Cap. 3. *De Combinationibus ſecundùm ſingulos exponentes.*
Cap. 4. *De Combinationibus, in quibus una, eademque res ſæpius recurrere poteſt.*
Cap. 5. *De Combinationibus, in quibus ordo, ſituſve rerum etiam attenditur.*
Cap. 6. *De Numeris multangulis, ſive Polygonis.*
Cap. 7. *De Numeris figuratis.*

...gorica.

C

6	7	8	9
12	14	16	18
18	21	24	27
24	28	32	36
30	35	40	45
36	42	48	54
42	49	56	63
48	56	64	72
54	63	72	81



TAB. I.

Tabula

A D

1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	15
6	12	18
7	14	21
8	16	24
9	18	27

B E



TAB. XI.

